Die Quadratur der Spiralkegel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen
Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

Arthur Czwalina
aus Berlin.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

MARBURG
Buchdruckerei von Joh. Hamel
1919.

Angenommen von der philosophischen Fakultät Marburg
am 30. September 1918.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

Berichterstatter: Geh. Regierungsrat o. ö. Prof. Dr. Hensel.

Meiner lieben Schwester Margarete
gewidmet.

Die Quadratur der Spiralkegel.

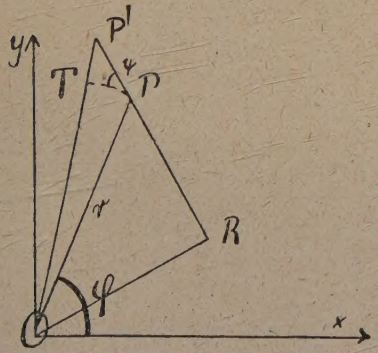
§ 1.

Problemstellung und allgemeine Lösung.

Es sei ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem angenommen. In der x—y-Ebene liege eine Kurve, die in Polarkoordinaten gegeben sei durch die Gleichung

$$1)\quad r = f(\varphi)$$

Auf der positiven z-Achse sei in der Entfernung q vom Nullpunkt ein Punkt S angenommen. Wenn ein Punkt der Kurve 1) mit P bezeichnet wird, so beschreibt P S bei festem S und veränderlichem P eine Kegelfläche, um deren Integration es sich im folgenden unter der später eingeführten speziellen Festsetzung $f(\varphi) = \varphi^n$ handeln soll.



P′ sei ein dem Punkt P benachbarter Punkt der Kurve 1). Die Polarkoordinaten von P′ seien $r + dr$, $\varphi + d\varphi$. Der um O mit O P beschriebene Kreis treffe O P′ in T. Dann ist $TP' = dr$, $PT = r\,d\varphi$. Wird der Winkel $TPP' = \psi$ genannt, so folgt $2)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}$ Ferner ist

$$\Delta\, OPP' = \frac{1}{2} f^2(\varphi)\, d\varphi .$$

Es werde von O aus auf die Tangente P P′ der Kurve das Lot O R gefüllt. Da Winkel $POR = \psi$ ist, so ist

$$OR = r\cos\psi = \frac{r}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}},$$ also unter Rücksicht auf 1) und 2)

3) $OR = \frac{f(\varphi)}{\sqrt{1 + \frac{f'^2(\varphi)}{f^2(\varphi)}}}$ Es werde Winkel $SRO = \gamma$ gesetzt. Damit ist

$$\cos\gamma = \frac{OR}{SR} = \frac{OR}{\sqrt{q^2 + OR^2}}, \text{ also}$$

4) $$\cos\gamma = \frac{f(\varphi)}{\sqrt{q^2\left[1 + \frac{f'^2(\varphi)}{f^2(\varphi)}\right] + f^2(\varphi)}}$$

γ hat nun die Bedeutung des Neigungswinkels des Flächenelementes des Kegels gegen das Flächenelement der ebenen Kurve. Da dieses nun die rechtwinklige Projektion von jener ist, so folgt für das Flächenelement des Kegels, das mit dF bezeichnet werden möge $dF = \frac{f^2(\varphi)\, d\varphi}{2\cos\gamma}$, also

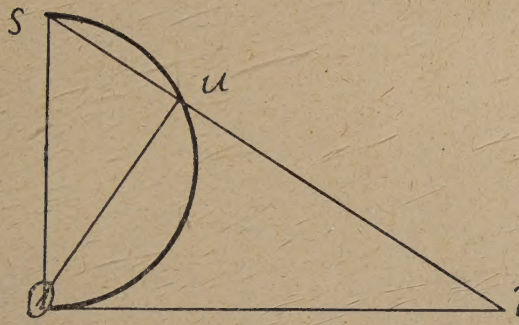
5) $$dF = \frac{1}{2} f(\varphi) \sqrt{q^2\left(1 + \frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^2}\right) + f^2(\varphi)}\, d\varphi$$

Ferner soll der Winkel des abgerollt gedachten Kegelmantels bestimmt werden. Er heiße ξ. Zum genannten Zweck berechnen wir denjenigen Teil des Flächenelementes dF, der sich innerhalb der um S mit q konstruierten Kugel befindet. Dieses Flächenstück ist $\frac{1}{2} q^2\, d\xi$. Nun besteht ersichtlich die Proportion

$\frac{1}{2} q^2\, d\xi : dF = q^2 : SP^2 = q^2 : (q^2 + f^2(\varphi)$, also ist

6) $$d\xi = \frac{f(\varphi)}{q^2 + f^2(\varphi)} \sqrt{q^2\left(1 + \frac{f'(\varphi)^2}{f(\varphi)^2}\right) + f^2(\varphi)}\, d\varphi$$

Drittens soll dasjenige Stück der Fläche des Kegelmantels bestimmt werden, das innerhalb der über SO als Durchmesser konstruierten Kugel liegt. Das gekennzeichnete Flächenstück sei K. SP schneide die Kugelfläche in U. Dann ist offenbar



$$\frac{dK}{dF} = \frac{SU^2}{SP^2}$$

Nun ist aber

$$\frac{SU}{SO} = \frac{SO}{SP}, \text{ also}$$

$$\frac{SU}{SP} = \frac{SO^2}{SP^2}$$

also

$$\frac{dK}{dF} = \frac{SO^4}{SP^4} = \frac{q^4}{(q^2 + f^2(\varphi))^2}$$

Daher ist unter Berücksichtigung von 5)

$$7)\ dK = \frac{q^4 f(\varphi)}{2(q^2+f^2(\varphi))^2} \sqrt{q^2\left(1 + \frac{f'^2(\varphi)}{f^2(\varphi)}\right) + f^2(\varphi)}\, d\varphi$$

Die Untersuchung soll weitergeführt werden unter der speziellen Voraussetzung, daß

$$8)\ f(\varphi) = a\varphi^n \text{ ist, wo } n \text{ eine reelle Zahl ist.}$$

Es sei ferner abkürzend gesetzt

$$9)\ \frac{q}{a} = b.$$ Dann liefern die Formeln 5) 6) 7) folgende Integralformeln

$$10)\ F = \frac{a^2}{2} \int \varphi^{n-1} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$11)\ \xi = \int \frac{\varphi^{n-1}}{b^2 + \varphi^{2n}} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$12)\ K = \frac{a^2 b^4}{4} \int \frac{\varphi^{n-1}}{(b^2 + \varphi^{2n})^2} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi, \text{ wobei}$$

$$13)\ T(\varphi) = b^2\varphi^2 + b^2 n^2 + \varphi^{2n+2} \text{ ist.}$$

Damit die vorstehenden Ausdrücke in geschlossener Form integrabel sind, dafür ist eine notwendige Bedingung die, daß n eine rationale Zahl ist. Es sei gesetzt $n = \frac{p}{q}$ Dabei dürfen p und q unbeschadet der Allgemeinheit als

teilerfremde ganze Zahlen und q als positiv angenommen werden.

Es ist nun $T(\varphi) = b^2\varphi^2 + b^2 n^2 + \varphi^{\frac{2p}{q}} + 2$. Wenn $\varphi^{\frac{2}{q}} = y$ gesetzt wird, so ist

$$\varphi = y^{\frac{q}{2}},\quad d\varphi = \frac{q}{2} y^{\frac{q}{2}-1} dy, \text{ und es folgt}$$

$$T(\varphi) = b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}. \text{ Daher ist}$$

$$14)\quad F = \frac{a^2 q}{4}\int y^{\frac{p-2}{2}} \sqrt{b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}}\, dy$$

$$\xi = \frac{q}{2}\int \frac{y^{\frac{p-2}{2}}}{b^2 + y^p} \sqrt{b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}}\, dy$$

$$K = \frac{a^2 b^4 q}{8}\int \frac{y^{\frac{p-2}{2}}}{(b^2 + y^p)^2} \sqrt{b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}}\, dy.$$

Da nun p eine ganze Zahl ist und somit die Irrationalität dieser 3 Integranden vom gleichen Grade ist, so ist auch die Transzendenz dieser 3 Integrale die gleiche, d. h. je nachdem F auf zyklometrische, elliptische oder hyperelliptische Integrale führt, führen auch ξ und K auf zyklometrische, elliptische oder hyperelliptische Integrale und umgekehrt.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Transzendenz für reziproke Werte von n die gleiche ist. Betrachten wir F als Funktion von n, F [n], so ist also

$$F[n] = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{n-1} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2 q}{4}\int y^{\frac{p-2}{2}} \sqrt{b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}}\, dy$$

$$F\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{\frac{1-n}{n}} \sqrt{b^2\varphi^2 + \frac{b^2}{n^2} + \varphi^{\frac{2+2n}{n}}}\, d\varphi. \text{ Setzt man}$$

$$\varphi^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\psi},\ \frac{1}{n}\varphi^{\frac{1}{n}-1} = -\frac{1}{\psi^2} d\psi, \text{ so ist}$$

$$F\left[\frac{1}{n}\right] = -\frac{a^2 n}{2}\int \frac{1}{\psi^2}\sqrt{b^2\psi^{-2n} + \frac{b^2}{n^2} + \psi^{-2n-2}}\, d\psi$$

$$F\left[\frac{1}{n}\right] = -\frac{a^2 n}{2}\int \frac{1}{\psi^{2n+2}}\psi^{n-1}\sqrt{b^2\psi^2 + 1 + \frac{b^2}{n^2}\psi^{2n+2}}\, d\psi$$

oder auch, wenn $\psi = y_1^{\frac{q}{2}}, d\psi = \frac{q}{2}\cdot y_1^{\frac{q}{2}-1}\, dy_1$ gesetzt wird

$$F\left[\frac{1}{n}\right] =$$

$$-\frac{a^2 p}{4}\int \frac{1}{y_1^{p+q}}\cdot y_1^{\frac{p-2}{2}}\cdot\sqrt{b^2 y_1^{q} + 1 + \frac{b^2}{n^2}y_1^{p+q}}\, dy_1$$

Da p und q ganze Zahlen sind, so erkennt man durch Vergleich dieses Ausdruckes mit Gleichung 14), daß für reziproke Werte von n der gleiche Transzendenzgrad eintritt.

Weiter läßt sich zeigen, daß auch für solche Werte von n, die symmetrisch zum Werte $-\frac{1}{2}$ liegen, der Transzendenzgrad der gleiche ist. Setzt man $2n+1 = 2m$, so ist

$$F_m = \frac{a^2}{2}\int \varphi^m\sqrt{\frac{b^2}{\varphi} + \frac{b^2(2m-1)^2}{\varphi^3} + \varphi^{2m-2}}\, d\varphi \text{ und}$$

$$F_{-m} = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-m}\sqrt{\frac{b^2}{\varphi} + \frac{b^2(2m+1)^2}{\varphi^3} + \varphi^{2m-2}}\, d\varphi$$

also, wenn $\varphi = \frac{1}{\psi}$ gesetzt wird

$$F_{-m} = -\frac{a^2}{2}\int \psi^m\sqrt{\frac{b^2(2m+1)^2}{\psi} + \frac{b^2}{\psi^3} + \psi^{2m-2}}\, d\psi.$$

Wenn man m durch -m ersetzt, d. h. also n durch den zu ihm bezüglich $-\frac{1}{2}$ spiegelbildlich gelegenen Wert, so erhält man für F den gleichen Transzendenzgrad. n läßt also zwei „Transformationen in sich" zu. Es sollen nun alle Fälle gefunden werden, in denen die Ausdrücke F, ξ, K nicht hyperelliptisch werden. Man darf nun auf Grund der zweiten Transformation zunächst die Beschränkung

treffen $\frac{p}{q} \gtrless -\frac{1}{2}$; wegen der ersten Transformation darf man $\frac{p}{q}$ auf echte Brüche beschränken. Es durfte weiter q als positiv angenommen werden. Aus Gl. 14. wird ersichtlich, daß, da der Grad des Radikanden nicht unter q herabgedrückt werden kann, $q \leqq 4$ sein muß. Im Falle $q = 4$, der für p nur die Werte -1, -3 zuließe (abgesehen von O) müßte in Gl. 14. der Faktor $y^{\frac{1}{2}}$ in die Wurzel als y gestellt werden. Dadurch würde der Grad des Radikanden auf 5 erhöht. $q = 4$ ist also nicht möglich. In unserem so beschränkten Bereich liegen nur noch die Werte $n = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, O, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$. Von diesen Fällen erweisen sich $n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$ als hyperelliptisch. Die übrigen 5 Fälle ergeben zusammen mit den Transformationen, die n zuläßt

$$n = O, 1, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1, -2, -1\frac{1}{2}, -3.$$

Von diesen Fällen bedarf der 1te keiner Untersuchung, da er sich auf den Kreiskegel bezieht. Der Fall $n = -1$ ist mit Hilfe zyklometrischer Funktionen zu erledigen. Die anderen Fälle führen auf elliptische Integrale. Im Falle $n = 1$ entstehen für den speziellen Wert $b = 2$, im Falle $n = -2$ für $b = \frac{1}{2}$, im Falle $n = -\frac{1}{2}$ für $b = 1$ unterelliptische Integrale. Die Intergrationen werden im folgenden einzeln durchgeführt werden. Am Ende der ganzen Abhandlung soll endlich untersucht werden, ob in denjenigen Fällen, in denen im allgemeinen Fall hyperelliptische Integrale entstehen, eine spezielle Wahl von b derart möglich ist, daß das Integral auf ein elliptisches herab transformiert wird.

Zuvor sollen einige elliptische Integrale, deren man zur Berechnung bedarf, bestimmt werden.

§ 2.

Bestimmung einiger elliptischer Integrale.

Aus der Formel

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-2\frac{\sigma'}{\sigma}v=-\frac{p'v}{pu-pv}$$

folgt durch Integration

$$15)\quad \int\frac{du}{pu-pv}=\frac{1}{p'v}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]$$

Durch Differentiation nach v folgt hieraus

$$16)\quad \int\frac{du}{(pu-pv)^2}=-\frac{1}{p'v^2}\left[2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu-pv}+2upv\right]-\frac{p''v}{p'v^3}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]$$

Weiter ergibt sich sich durch abermalige Differentiation nach v

$$2\int\frac{p'v\,du}{(pu-pv)^3}=\frac{2p''v}{p'v^3}\left[2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu-pv}+2upv\right]-\frac{1}{p'v^2}\left[\frac{p'up'v}{(pu-pv)^2}+2up'v\right]-\frac{p'vp'''v-3p''v^2}{p'v^4}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]+\frac{p''v}{p'v^3}\left[2upv+\frac{p'u}{pu-pv}+2\frac{\sigma'}{\sigma}u\right]$$ oder

$$17)\quad \int\frac{du}{(pu-pv)^3}=\frac{3p''v}{2p'v^4}\left[2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu-pv}+2upv\right]-\frac{1}{2p'v^2}\left[\frac{p'u}{(pu-pv)^2}+2u\right]-\frac{p'vp'''v-3p''v^2}{2p'v^5}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]$$

Ferner bedarf man für die folgenden Untersuchungen

der Integrale von der Form $\int \frac{p'u^2\,du}{(pu-pv)^\lambda}$, wo λ eine ganze positive Zahl ist. Es ergibt sich unmittelbar

$$\int \frac{p'u\,du}{(pu-pv)^{\lambda-1}} = -\frac{1}{(\lambda-2)\,(pu-pv)^{\lambda-2}}$$

Differentiiert man nach u, so folgt

$$\int \frac{(pu-pv)^{\lambda-1}\,p''u-(\lambda-1)\,p'u^2\,(pu-pv)^{\lambda-2}}{(pu-pv)^{2\lambda-1}}\,du =$$

$$\frac{p'u}{pu-pv)^{\lambda-1}}.$$ Hieraus folgt

$$\int \frac{p'u^2du}{(pu-pv)^\lambda} = -\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{p'u}{(pu-pv)^{\lambda-1}}$$

$$+\frac{1}{\lambda-1}\int \frac{p''u\,du}{(pu-pv)^{\lambda-1}}.$$ Nun ist $p''u = 6\,p^2u - \frac{1}{2}g_2 =$ $6\,(pu-pv)^2 + 12\,pv\,(pu-pv) + p''v.$ Also ist

$$\int \frac{p'u^2\,du}{(pu-pv)^\lambda} = -\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{p'u}{(pu-pv)^{\lambda-1}} +$$

$$\frac{6}{\lambda-1}\int \frac{du}{(pu-pv)^{\lambda-3}} + \frac{12\,pv}{\lambda-1}\int \frac{du}{(pu-pv)^{\lambda-2}} +$$

$$\frac{p''v}{\lambda-1}\int \frac{du}{(pu-pv)^{\lambda-1}}$$

Setzt man rechts die Werte, die die Formeln 15) 16) 17) liefern, ein, so ergibt sich das System

18) $$\int \frac{p'u^2}{(pu-pv)^2}\,du = -\frac{p'u}{pu-pv} + \frac{p''v}{p'v}\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v\right.$$

$$\left. - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) + 6\,upv - 6\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u$$

$$\int \frac{p'u^2\,du}{(pu-pv)^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'u}{(pu-pv)^2} + 3u + \frac{1}{p'v}\left(6\,pv\right.$$

$$\left. -\frac{p''v^2}{2\,p'v^2}\right)\left(2\,u\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)$$

$$-\frac{p''v}{p'v^2}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu-pv}+2upv\right)$$

$$\int\frac{p'u^2\,du}{(pu-pv)^4}=-\frac{1}{3}\frac{p'u}{(pu-pv)^3}+\frac{1}{p'v^5}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v\right.$$

$$\left.-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)\left(2p'v^4-4pvp'v^2p''v+\frac{1}{2}p''v^3-\frac{1}{6}p'vp''vp'''v\right)$$

$$+\frac{1}{2p'v^4}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu-pv}+2upv\right)\left(p''v^2-8pvp'v^2\right)$$

$$-\frac{p''v}{6p'v^2}\left(\frac{p'u}{(pu-pv)^2}+2u\right)$$

Unter Benutzung der Identität

$p'u^2=(pu-pv)(4p^2u+4pupv+4p^2v-g_2)+p'v^2$

ergibt sich ferner

$$\int\frac{p'u^2du}{pu-pv}=4\int p^2u\,du+4pv\int pu\,du+u\left(4p^2v-g_2\right)$$

$$+p'v^2\int\frac{du}{pu-pv}$$ Daraus folgt

19) $$\int\frac{p'u^2du}{pu-pv}=\frac{2}{3}p'u-4pv\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{2}{3}up''v-\frac{1}{3}g_2u$$

$$+p'v\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)$$

Nunmehr sollen die ersten Integrale der Reihe $\int p^n u\,du$ aufgestellt werden.

Durch wiederholte Differentiation der Gleichung

$p'u^2=4p^3u-g_2pu-g_3$ folgt

20) $p''u=6p^2u-\frac{1}{2}g_2$

21) $p'''u=12\,pu\,p'u$

22) $p^{IV}u=12\,(10\,p^3u-\frac{3}{2}g_2\,pu-g_3)$

23) $p^{V}u = 26\,(10\,p^2u - \frac{1}{2}g_2)\,p'u$

24) $p^{VI}u = 36\,(140\,p^4u - 28\,g_2\,p^2u - 20\,g_3\,pu + \frac{1}{4}\,g_2{}^2)$

25) $p^{VII}u = 144\,(140\,p^3u - 14\,g_2 pu - 5\,g_3)\,p'u$

26) $p^{VIII}u = 432\,(840\,p^5u - 210\,g_2 p^3u - 150\,g_3 p^2u + 7\,g_2{}^2 pu + \frac{11}{2}\,g_2\,g_3)$ Aus 20) folgt durch Integration

27) $\int p^2u\,du = \frac{1}{6}\,p'u + \frac{1}{12}g_2\,u.$

Aus 22) folgt durch Integration

28) $\int p^3u\,du = \frac{1}{10}\left(pu\,p'u - \frac{3}{2}\,g_2\frac{\sigma'}{\sigma}u + g_3 u\right)$

Aus 24) folgt unter Berücksichtigung von 27)

29) $\int p^4u\,du = \frac{1}{14}p^2u\,p'u + \frac{5}{168}g_2\,p'u + \frac{5}{336}\,g_2{}^2u - \frac{1}{7}\,g_3\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u$

Aus 26) folgt unter Berücksichtigung von 27) und 28)

30) $\int p^5u\,du = \frac{1}{18}\,p^3u\,p'u + \frac{7}{360}g_2\,pu\,p'u + \frac{1}{36}\,g_3\,p'u - \frac{1}{40}\,g_2{}^2\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u + \frac{1}{30}\,g_2\,g_3\,u.$

§ 3.

Der durch die Spirale $r = a\varphi$ erzeugte Kegel.

Wird $n = 1$ gesetzt, so ergibt sich die Archimedische Spirale $r = a\varphi$. Es wird

$T(\varphi) = b^2 + b^2\,\varphi^2 + \varphi^4$. Man transformiert

31) $\varphi^2 = s - \frac{b^2}{3}$. Dann ist

$$T(\varphi) = s^2 + \frac{b^2}{3}s + b^2 - \frac{2b^4}{9}, \quad d\varphi = \frac{ds}{2\sqrt{s - \frac{b^2}{3}}}$$

Es ist also, wenn

32) $g_2 = 4b^2\left(\frac{b^2}{3} - 1\right) \quad g_3 = \frac{4b^4}{3}\left(1 - \frac{2b^2}{9}\right)$ gesetzt wird

$$\sqrt{b^2 + b^2\varphi^2 + \varphi^4}\, d\varphi = \frac{s^2 + \frac{b^2}{3} + b^2\left(1 - \frac{2b^2}{9}\right)}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}\, ds.$$

Die Wurzeln des Radikanden der rechten Seite, der mit S bezeichnet werden möge, haben die Werte

33) $e_1 = \frac{b^2}{3}$

$$e_2 = -\frac{b^2}{6} + b\sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$$

$$e_3 = -\frac{b^2}{6} - b\sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$$

Es sei zunächst ein spezieller Fall erörtert. $T(\varphi)$ hat zwei gleiche Wurzeln dann und nur dann, wenn $b = 2$ ist. In diesem Falle gehen die Formeln 10. 11. 12. über in

$$F = \frac{a^2}{2}\int(\varphi^2 + 2)\, d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{\varphi^2 + 2}{\varphi^2 + 4}\, d\varphi$$

$$K = 8a^2 \int \frac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 4)^2}\, d\varphi.$$

Wählt man als untere Grenze des Integrals den Wert $\varphi = 0$, so folgt

34) $F = \frac{a^2}{6}(\varphi^3 + 6\varphi)$

35) $\xi = \varphi - \operatorname{arctang}\frac{\varphi}{2}$

$$36)\quad K = a^2\left(3\ \operatorname{arctang}\frac{\varphi}{2} - \frac{2\varphi}{\varphi^2+4}\right)$$

Die Formel 36) ist insofern bemerkenswert, als K endlich bleibt für $\varphi = \infty$. Es wird

$$37)\quad \lim_{\varphi=\infty} K = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Im folgenden werde nun der Fall $b = 2$ ausgeschlossen. Die Formeln 10. 11. 12. nehmen dann folgende Gestalt an

$$38)\quad F = \frac{a^2}{2}\int \frac{s^2 + e_1 s + e_2 e_3}{\sqrt{S}}\,ds$$

$$39)\quad \xi = \int \frac{s^2 + e_1 s + e_2 e_3}{\left(s + \frac{2b^2}{3}\right)\sqrt{S}}\,ds$$

$$40)\quad K = \frac{a^2 b^4}{4}\int \frac{s^2 + e_1 s + e_2 e_3}{\left(s + \frac{2b^2}{3}\right)^2\sqrt{S}}\,ds$$

Es sei nun gesetzt $s = p(u; g_2, g_3)$, $ds = p'u\,du$, $\sqrt{S} = -p'u$. Es sei ferner erklärt die Konstante v durch die Gleichung

$$41)\quad pv = -\frac{2b^2}{3}.$$ Es ist dann $p'v = \pm 2b^2 i$.

Da durch die Gleichung 41) v nur modulo der Perioden und bis auf das Vorzeichen genau bestimmt ist, so kann nunmehr noch fixiert werden

$$42)\quad p'v = -2b^2 i.$$ Da ferner

$s^2 + e_1 s + e_2 e_3 = \left(s - \frac{b^2}{3}\right)\left(s + \frac{2b^2}{3}\right) + b^2$ ist, so folgt

$$F = -\frac{a^2}{2}\left[\int p^2 u\,du + e_1\int pu\,du + e_2 e_3 u\right]$$

$$\xi = -\int pu\,du - b^2\int \frac{du}{pu - pv} + \frac{b^2 u}{3}$$

$$K = -\frac{a^2 b^4}{2}\left[u - b^2\int \frac{du}{pu - pv} + b^2\int \frac{du}{(pu - pv)^2}\right.$$

Es ist also unter Berücksichtigung der Integralformeln 15) 16) 27)

$$F' = -\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{6}\,p'u + \frac{1}{12}\,g_2\,u - e_1\,\frac{\sigma}{\sigma'}u + e_2\,e_3\,u\right] + c$$

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma}\,u - \frac{b^2}{p'v}\left(2\,u\,\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) + c'$$

$$K = -\frac{a^2 b^4}{2}\left[u - \frac{b^2}{p'v}\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) - \frac{b^2}{p'v^2}\left(2\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u + \frac{p'u}{pu-pv} + 2\,upv\right) - \frac{b^2 p''v}{p'v^3}\left(2\,u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)\right] + c''$$

Hierbei bedeuten c, c', c'' Integrationskonstanten. Wird $p'v = -2\,b^2\,i$ und $p''v = 6\,p^2\,v - \frac{1}{2}\,g_2 = 2b^2(1+b^2)$ eingesetzt, so folgt

$$F = -\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{6}\,p'u + \frac{b^2}{3}\left(\frac{b^2}{3} - 1\right)u - \frac{b^2}{3}\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u + u\,b^2\left(1 - \frac{2b^2}{9}\right)\right] + c$$

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma}\,u - \frac{i}{2}\left[2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right] + \frac{b^2 u}{3} + c'$$

$$K = -\frac{a^2 b^4}{2}\left[u - \frac{i}{2}\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) + \frac{1}{4b^2}\left(2\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u + \frac{p'u}{pu-pv} - \frac{4b^2 u}{3}\right) + \frac{b^2+1}{4b^2}\,i\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)\right] + c''$$

$$F = -\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{6}\,p'u - \frac{b^2}{3}\left(\frac{b^2}{3} - 2\right)u - \frac{b^2}{3}\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u\right] + c$$

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma}\,u - \frac{i}{2}\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) + \frac{b^2 u}{3} + c'$$

$$K = -\frac{a^2 b^4}{2}\left[\frac{2u}{3} + \frac{1-b^2}{4b^2}\,i\left(2u\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2b^2}\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{4b^2\left(pu+\frac{2b^2}{3}\right)}+c''$$

Vom unbestimmten Integral muß nun zum bestimmten übergegangen werden. Wir wählen als untere Grenze wieder $\varphi = O$. Der zugehörige Wert von u ist, da seine p = Funktion zufolge 31, 33 den Wert e_1 annimmt ω. Unter Berücksichtigung der Gleichungen $\frac{\sigma(\omega+v)}{\sigma(\omega-v)} = e^{2\eta v}$, $\log\frac{\sigma(\omega+v)}{\sigma(\omega-v)} = 2\eta v$ erhalten die Formeln die Gestalt

41) $$F=\frac{a^2}{2}\left[-\frac{1}{6}p'u+\frac{b^2}{3}\left(\frac{b^2}{3}-2\right)(u-\omega)+\frac{b^2}{3}\frac{\sigma'}{\sigma}u-\frac{b^2}{3}\eta\right]$$

42) $$\xi=\frac{\sigma'}{\sigma}u-\eta-\frac{i}{2}\left[2(u-\omega)\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]$$

$$-i\eta v+\frac{b^2}{3}(u-\omega)$$

43) $$K=\frac{a^2b^4}{2}\left[-\frac{2}{3}(u-\omega)+\frac{b^2-1}{4b^2}\left[2(u-\omega)\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]+\frac{b^2-1}{2b^2}i\eta v-\frac{1}{2b^2}\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{1}{2b^2}\eta-\frac{p'u}{4b^2\left(pu+\frac{2b^2}{3}\right)}\right]$$

Nun ist $pu = s = \varphi^2+\frac{b^2}{3}$, $p'u = -\sqrt{S} =$

$-2\varphi\sqrt{\varphi^4+\varphi^2b^2+b^2}$. Also ist

44) $$F=\frac{a^2b^2}{6}\left[\frac{\varphi}{b^2}\sqrt{\varphi^4+b^2\varphi^2+b^2}+\left(\frac{b^2}{3}-2\right)(u-\omega)\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma'}{\sigma}u-\eta\right]$$

45) $$\xi=\frac{\sigma'}{\sigma}u-\eta-\frac{1}{2}\left[2(u-\omega)\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right]$$

$$-i\eta v+\frac{b^2}{3}(u-\omega)$$

$$46)\ K = \frac{a^2 b^2}{4}\left[\frac{\varphi}{\varphi^2 + b^2}\sqrt{\varphi^4 + b^2\varphi^2 + b^2} - (u-\omega)\left(\frac{4b^2}{3} + i(1-b^2)\frac{\sigma'}{\sigma}v\right) + \frac{1-b^2}{2} i \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} + (b^2-1) i\eta v - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \eta\right]$$

wobei also $pv = -\frac{2b^2}{3}$ ist.

Die numerische Ausrechnung für einen gegebenen Wert von φ und b bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Dabei ist bemerkenswert, daß der Wert von K endlich bleibt, wenn φ nach dem Werte ∞ konvergiert. Um dies zu erkennen, bedienen wir uns der Formel 43. Das Glied $-\frac{1}{2b^2}\frac{\sigma'}{\sigma}u$ verhält sich für $u = O$ wie $-\frac{1}{2b^2 u}$, das Glied $-\frac{p'u}{4b^2\left(pu + \frac{2b^2}{3}\right)}$ wie $\frac{1}{2b^2 u}$, sodaß also beide Glieder vereinigt für $\varphi = \infty$ den Wert O ergeben. Es folgt also

$$47)\ \lim_{\varphi=\infty} K = \frac{1}{4}a^2 b^2\left[\omega\left[\frac{4b^2}{3} + i(1-b^2)\frac{\sigma'}{\sigma}v\right] + \eta + (b^2-1)\left(\frac{\pi}{2} + i\eta v\right)\right]$$

Die Formeln 44—47 können auf ihre Richtigkeit geprüft werden, indem wie im oben behandelten speziellen Falle $b = 2$ gesetzt wird. Dann wird $\omega = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ $\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{2}{3}u + \varphi$, $\eta = \frac{\pi}{6}\sqrt{2}$, $\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} = \frac{4}{3}uv + 2i\,\mathrm{arctg}\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{2}{3}v - 2i$; es ist ferner $u = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\sqrt{2}\right)$, welch letztere Beziehung aber bei der Verifikation entbehrt

werden kann. Die Verifikation führt die Formeln 44—47 in die Formeln 34—37 über.

§ 4.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{\frac{1}{2}}$ erzeugte Kegel.

Wenn die Spirale $r = a\varphi^{\frac{1}{2}}$ in Rede steht, so ist also $n = \frac{1}{2}$ zu setzen. Es wird

$$T(\varphi) = b^2\varphi^2 + \frac{b^2}{4} + \varphi^3 \quad \text{Es ist also}$$

$$F = \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\varphi}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^4}\,d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{1}{\varphi(b^2+\varphi)}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^4}\,d\varphi$$

$$K = \frac{a^2b^4}{2}\int \frac{1}{\varphi(b^2+\varphi)^2}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^4}\,d\varphi.$$

Um auf die Weierstraßsche Normalform zu gelangen, transformiert man am bequemsten die Wurzel $\varphi = 0$ in das Unendliche, indem man setzt

47) $\varphi = \frac{1}{s}$. Dann wird

$$F = -\frac{a^2}{2}\int \frac{1}{s}\sqrt{\frac{b^2}{s^3} + \frac{b^2}{4s} + \frac{1}{s^4}}\,ds =$$

$$-\frac{a^2b}{8}\int \frac{1}{s^3}\sqrt{4s^3 + 16s + \frac{16}{b^2}}\,ds$$

Die Invarianten erhalten den Wert

$g_2 = -16$, $g_3 = -\frac{16}{b^2}$ Die Diskriminante ist

$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = -256 - \frac{432}{b^4}$ Bei jedem reellen

Wert von φ führt die Integration, da G von O verschieden ist, auf elliptische Funktionen. Es sei gesetzt $s = p(u; g_2, g_3)$, $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$, $\sqrt{S} = -p'u$. Dann ist

$$48)\quad F = \frac{a^2 b}{8} \int \frac{p'u^2\, du}{p^3 u}$$

$$49)\quad \xi = \frac{1}{4b} \int \frac{p'u^2\, du}{p^2 u \left(pu + \frac{1}{b^2}\right)}$$

$$50)\quad K = \frac{a^2 b}{8} \int \frac{p'u^2}{pu \left(pu + \frac{1}{b^2}\right)}\, du$$

Wird mit v ein Wert von u bezeichnet, für den $pv = O$ ist, so kann der Ausdruck 48) auf Grund der Formel 18 integriert werden. Es ergibt sich

$$\frac{8F}{a^2 b} = -\frac{1}{2}\frac{p'u}{p^2 u} + 3u - \frac{p''v^2}{2p'v^3}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)$$
$$-\frac{p''v}{2p'v^2}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{p'u}{pu}\right) + \text{const.}$$

Nun ist $p'v = -\sqrt{-g_3} = -\frac{4}{b}$. Das Vorzeichen darf nämlich noch beliebig fixiert werden, da durch die Bestimmung $pv = O$, v nur bis auf das Vorzeichen bestimmt ist. Ferner ist $p''v = 6p^2v - \frac{1}{2}g_2 = -\frac{1}{2}g_2 = 8$ und $p'''v = 12\, pv\, p'v = O$. Daher ist

$$\frac{8F}{a^2 b} = -\frac{1}{2}\frac{p'u}{p^2 u} + 3u + \frac{b^3}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)$$
$$-\frac{b^2}{4}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{p'u}{pu}\right) + \text{const.}$$

Geht man nun zur Bestimmung der Konstanten über, so ergibt sich, wenn wieder $\varphi = O$ als Ausgangswert gewählt wird, daß für $u = O$ die Glieder $-\frac{1}{2}\frac{p'u}{p^2 u}$ und

$-\frac{b^2}{4}\left[2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu}\right]$ zusammengefaßt den Wert O ergeben.

Die Konstante erhält den Wert $-\frac{1}{2}\pi b^3 i$. Indem man diesen Wert beim logarithmischen Gliede berücksichtigt, ergibt sich

$$\frac{8F}{a^2b^2}=-\frac{p'u}{2p^2u}+3u+\frac{b^3}{2}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)}\right]$$

$$-\frac{b^2}{4}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{p'u}{pu}\right)$$

Da nun $pu=s=\frac{1}{\varphi}$, $p'u=-\sqrt{4s^3+16s+\frac{16}{b^2}}=$

$-\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{4\varphi+16\varphi_3+\frac{16}{b^2}\varphi^4}$ ist, so folgt endlich

$$51)\quad F=\frac{a^2b}{8}\left[\left(2+\frac{b^2}{\varphi}\right)\sqrt{\frac{1}{b^2}\varphi^4+\varphi^3+\frac{\varphi}{4}}+3u\right.$$

$$\left.+\frac{b^3}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v-\log\frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)}\right)-\frac{b^4}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}u\right]$$

ξ war bestimmt durch die Gleichung 49)

$\xi=\frac{1}{4b}\int\frac{p'u^2.}{p^2u\left(pu+\frac{1}{b^2}\right)}du$. Nun ist $\frac{1}{b^2}=\frac{g_3}{g_2}$. Bestimmt man nun eine Konstante w durch die Gleichung $pw=-\frac{g_3}{g_2}$ und fixiert das Vorzeichen von w durch die Gleichung $p'w=\frac{2}{b^3i}$, so erhält man

$\xi=\frac{1}{4b}\int\frac{p'u^2}{p^2u\,(pu-pw)}du$. Es kann aber dem Integranden die Form gegeben werden $\frac{4p^3u+16pu+\frac{16}{b^2}}{p^2u\,(pu-pw)}=$

$4 - \frac{4}{b^2(pu-pw)} + \frac{16}{p^2u}$. Daher ist $\xi = \frac{u}{b} - \frac{1}{b^2}\int \frac{du}{pu-pw}$ $+ \frac{4}{b}\int \frac{du}{p^2u}$. Unter Berücksichtigung von 15) und 16) folgt, da $p''w = \frac{6}{b^4} + 8$ ist

$$\xi = \frac{u}{b} - \frac{i}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}w - \log\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u-w)}\right) - \frac{b}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

$$- \frac{b}{4}\frac{p'u}{pu} + \frac{b^2}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right) + \text{const.}$$

Bestimmt man die Konstante so, daß ξ für $\varphi = 0$ verschwindet und setzt für pu und p'u die Werte in φ ein, so folgt

$$52)\ \xi = \frac{u}{b} - \frac{i}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}\omega - \log\frac{\sigma(w+u)}{\sigma(w-u)}\right) - \frac{b}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

$$+ \frac{b}{\varphi}\sqrt{\frac{1}{b^2}\varphi^4 + \varphi^3 + \frac{\varphi}{4}} + \frac{b^2}{2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)}\right)$$

Es soll in Zukunft zur Vereinfachung der Schreibweise der Wert

$$53)\ 2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)} = \psi(u, v)$$ gesetzt werden. Dann ergibt sich in ähnlicher Weise

$$54)\ K = \frac{a^2 b}{8}\Big[2u - bi(1+4b^4)\psi(u, w) - 4b^3\psi(u, v)$$

$$+ 2b^2\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{4b^2}{\varphi(b^2+\varphi)}\sqrt{\frac{1}{b^2}\varphi^4 + \varphi^3 + \frac{\varphi}{4}}\Big]$$

Dabei ist die Konstante so bestimmt, daß zu $\varphi = 0$, $K = 0$ gehört. Läßt man φ nach unendlich konvergieren, so wird $u = v$. K wird alsdann logarithmisch unendlich groß. Die Kugel über dem Durchmesser q schneidet also aus der Kegelfläche kein endliches Flächenstück heraus.

§ 5.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^2$ erzeugte Kegel.

Setzt man $n = 2$, betrachtet man also die Spirale $r = a\varphi^2$, so erhält man aus 10) 11) 12)

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi\, T(\varphi)\, d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{b}{b^2 + \varphi^4}\sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$K = \frac{a^2 b^4}{2}\int \frac{\varphi}{(b^2 + \varphi^4)^2}\sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi, \text{ wobei}$$

$T(\varphi) = \varphi^6 + b^2\varphi^2 + 4b^2$. Setzt man $\varphi^2 = s$, so ist

$$\sqrt{T(\varphi)} = \sqrt{s^3 + b^2 s + 4b^2}, \text{ also}$$

$$\varphi\sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{8}\sqrt{4s^3 + 4b^2 s + 16b^2}\, ds$$

Man setzt also $g_2 = -4b^2$, $g_3 = -16b^2$, $s = p(u; g_2, g_3)$ Da beide Invarianten negativ sind, kann die Resolvente nicht verschwinden, also ein Fall unterelliptischer Integrabilität nicht eintreten, wenn b reell ist. Es ist

$$F = -\frac{a^2}{8}\int p'u^2\, du.$$

Nun ist $\int p'u^2\, du = 4\int p^3 u\, du - g_2\int pu\, du - g_3 u$, also

nach 28) $\int p'u^2\, du = \frac{2}{5}\, pu\, p'u + \frac{2}{5} g_2 \frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{3}{5} g_3 u$, also

ist $F = -\frac{a^2}{40}(2\, pu\, p'u + 2 g_2 \frac{\sigma'}{\sigma} u - 3 g_3 u + \text{const})$.

Wenn v wieder einen Wert darstellt, für den pu verschwindet und man den Wert von p'v durch die Gleichung fixiert $p'v = -4b$, so läßt sich nunmehr der Wert der Konstanten ermitteln. F möge gemessen werden vom Werte $\varphi = 0$ aus, dann ist

$$F = -\frac{a^2}{40}\left[2\,pu\,p'u - 8\,b^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v\right) + 48\,b^2(u-v)\right]$$

Da nun $pu = \wp^2$ und $p'u = -2\sqrt{\wp^6 + b^2\wp^2 + 4b^2}$ ist, so folgt

$$55)\quad F = \frac{a^2}{5}\left[\frac{1}{2}\wp^2\sqrt{\wp^6 + b^2\wp^2 + 4b^2} + b^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v\right) - 6\,b^2(u-v)\right]$$

Dieser Formel kann noch eine andere Gestalt gegeben werden. Da allgemein

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{1}{2}\frac{p'u + p'v}{pu - pv},\ \text{also hier}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) + \frac{1}{\wp^2}\left(\sqrt{\wp^6 + b^2\wp^2 + 4b^2} + 2b\right)$$

ist, so folgt

$$55a)\quad F = \frac{a^2}{5}\left[\left(\frac{1}{2}\wp^2 + \frac{b^2}{\wp^2}\right)\sqrt{\wp^6 + b^2\wp^2 + 4b^2} + \frac{2b^3}{\wp^2} + \frac{b^2}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - 6\,b^2(u-v)\right]$$

ξ entsteht aus F, indem man den Integranden mit $\frac{2}{a^2(p^2u + b^2)}$ multipliziert. Es ist also

$$\xi = -\frac{1}{4}\int \frac{4\,p^3u + 4\,b^2\,pu + 16\,b^2}{p^2u + \frac{1}{b^2}}\,du.\quad \text{Es ist aber}$$

$4\,p^3u + 4\,b^2\,pu + 16\,b^2 = 4\,pu\,(p^2u + b^2) + 16\,b^2$. Also ist

$$\xi = -\int pu\,du - 4\,b^2\int \frac{du}{p^2u + b^2}\ \text{oder auch}$$

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\,bi\left(\int \frac{du}{pu - bi} - \int \frac{du}{pu + bi}\right)$$

Es seien nun die Größen x und y bestimmt durch die Gleichungen

$$px = bi,\ py = -bi$$

Dann ist

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma} u + \frac{2bi}{p'x}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}x - \log\frac{\sigma(u+x)}{\sigma(u-x)}\right)$$

$$-\frac{2bi}{p'y}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}y - \log\frac{\sigma(u+y)}{\sigma(u-y)}\right) + \text{const.}$$

Für p'x und p'y ergibt sich $\pm 4b$. Da das Vorzeichen noch beliebig fixiert werden kann, so sei festgesetzt

$$p'x = p'y = -4b.$$ Dann ist

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma} u - iu\left(\frac{\sigma'}{\sigma}x - \frac{\sigma'}{\sigma}y\right) + \frac{i}{2}\lg\frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)} + \text{const.}$$

Nun ist $\frac{\sigma'}{\sigma}x - \frac{\sigma'}{\sigma}y = \frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) - \frac{2}{b}i$. Wird der Wert der Konstante so fixiert, daß zu $\varphi = 0$, $\xi = 0$ gehört, so folgt

$$\xi = \frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{\sigma'}{\sigma} v - i(u-v)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) - \frac{2i}{b}\right)$$

$$+ \frac{i}{2}\log\frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)\,\sigma(v-x)\,\sigma(v+y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)\,\sigma(v+x)\,\sigma(v-y)}$$

Es ist nun $\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{1}{2}\frac{p'u - 4b}{pu}$

Also folgt

$$56)\quad \xi = \frac{1}{\varphi^2}\left(2b + \sqrt{\varphi^6 + b^2\varphi + 4b^2}\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)$$

$$+ (u-v)\left(\frac{2}{b} - i\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y)\right) + \frac{i}{2}\log Z$$

$$\text{wobei } Z = \frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)\,\sigma(v-x)\,\sigma(v+y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)\,\sigma(v+x)\,\sigma(v-y)} \text{ ist.}$$

Für $\varphi = \infty$ nimmt ξ keinen endlichen Wert an.

Ferner ist $K = -\frac{a^2 b^4}{8} \int \frac{p' u^2 \, du}{(p^2 u + b^2)^2}$

Es sei

57) $Z_1 = \frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u+y)\,\sigma(v-x)\,\sigma(v-y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u-y)\,\sigma(v+x)\,\sigma(v+y)}$ gesetzt. Mißt man dann wieder K vom Werte $\varphi = O$ aus, so ergibt sich

58) $K = \frac{a^2 b^2}{32}\Big[2(u-v)\Big(b\,\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) - 4i\,\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) - 8\Big)$

$- 4\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) + 4i \log Z_1 - b \log Z - \frac{4}{\varphi^2}\Big(\sqrt{T(\varphi)} + 2b\Big)$

$+ \frac{4\varphi^2}{\varphi^4 + b^2}\sqrt{T(\varphi)}\Big]$

Daraus folgt weiter

59) $\underset{\varphi = \infty}{\text{limes}} K = \frac{a^2 b^2}{32}\Big[2v\Big(4i\,\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) + 8 - b\,\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y)\Big)$

$- b \log \frac{\sigma(v-x)\,\sigma(v-y)}{\sigma(v+x)\,\sigma(v+y)} + 4\,\frac{\sigma'}{\sigma}v + 4i \log \frac{\sigma(v-x)\,\sigma(v+y)}{\sigma(v+x)\,\sigma(v-y)}\Big]$

§ 6.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{2}}$ erzeugte Kegel.

Es werde die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{2}}$ untersucht. Dann erhalten die Formeln 10, 11, 12 folgende Gestalt

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{\varphi^{-\frac{3}{2}}}{b^2 + \frac{1}{\varphi}} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi$$

$$K = \frac{a^2 b^4}{2}\int \frac{\varphi^{-\frac{3}{2}}}{\left(b^2 + \frac{1}{\varphi}\right)^2} \sqrt{T(\varphi)}\, d\varphi, \text{ wo}$$

$$T(\varphi) = \sqrt{b^2\varphi^2 + \varphi + \frac{1}{4}b^2} \text{ ist, oder}$$

$$F = \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\varphi^2}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^2}\, d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{1}{\varphi(b^2\varphi + 1)}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^2}\, d\varphi$$

$$K = \frac{a^2 b^4}{2}\int \frac{1}{(b^2\varphi + 1)^2}\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{1}{4}b^2\varphi + \varphi^2}\, d\varphi.$$

Ein Fall unterelliptischer Integrabilität tritt ein für $b = 1$. Dann ist

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} + \varphi\right)d\varphi$$

$$\xi = \int \varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2} + \varphi}{1 + \varphi}\, d\varphi$$

$$K = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2} + \varphi}{(1+\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Bei unbestimmter Integration folgt

$$60)\quad F = \frac{a^2}{2}\sqrt{\varphi}\left(2 - \frac{1}{\varphi}\right) + \text{const.}$$

$$\xi = 2\sqrt{\varphi} - \operatorname{arctang}\sqrt{\varphi} + \text{const.}$$

$$K = \frac{a^2}{4}\left[4\sqrt{\varphi} - 5\operatorname{arctang}\sqrt{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi}}{1+\varphi}\right] + \text{const.}$$

Dazu ist zu bemerken, daß diese Integrale von einem Werte φ_0 aus bis $\varphi = \infty$ erstreckt, sämtlich unendlich groß werden. Werden die Integrale von einem Werte φ_0 aus bis $\varphi = 0$ erstreckt, so wird $F = \infty$, während ξ und K endlich bleiben. Es seien demnach ξ und K von $\varphi = 0$ aus gemessen, F dagegen von $\varphi = 1$ aus, was durch den Index 1 ausgedrückt werden mag.

61) $F_1 = \frac{a^2}{2}\left(2\sqrt{\varphi} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} - 1\right)$

$\xi = 2\sqrt{\varphi} - \text{arctang}\sqrt{\varphi}$

$K = \frac{a^2}{4}\left[4\sqrt{\varphi} - 5\,\text{arctang}\sqrt{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi}}{1+\varphi}\right]$

Nunmehr werde $b \neq 1$ angenommen. Es ist

$$F = \frac{a^2 b}{2}\int \frac{1}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^3 + \frac{\varphi^2}{b^2} + \frac{1}{4}\varphi}\, d\varphi.$$

Die Wurzeln des Radikanden sind

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{b^4} - 1},\ \varphi_3 = \frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{b^4} - 1}$$

Es werde gesetzt $\varphi = s - \frac{1}{3b^2}$. Dann geht die kubische Funktion unter dem Wurzelzeichen über in $(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$, wobei

$$e_1 = \frac{1}{3b^4},\ e_2 = -\frac{1}{6b^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{b^4} - 1},\ e_3 = -\frac{1}{6b^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{b^4} - 1}$$

ist. Es folgt also

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \frac{4}{3b^4} - 1,\ g^3 = -4e_2 e_3 = \frac{1}{3b^2}\left(1 - \frac{8}{9b^4}\right)$$

Man setze $s = p(u; g_2, g_3)$ und erhält

$$F = \frac{a^2 b}{4}\int \frac{p'u}{(pu - e_1)^2}\sqrt{4p^3u - g_2 pu - g_3}\, du \text{ oder}$$

$$F = -\frac{a^2 b}{4}\int \frac{p'u^2\, du}{(pu - e_1)^2}$$ Nun ist aber infolge von 18)

$$\int \frac{p'u^2\, du}{(pu - e_1)^2} = 4e_1 u - \frac{2p'u}{pu - e_1} - 8\frac{\sigma'}{\sigma}u.$$ Also ist

62) $F = a^2 b \left(2 \frac{\sigma'}{\sigma} u - \sqrt{\varphi + \frac{1}{4\varphi} + \frac{1}{b^2}} - \frac{u}{3 b^2} \right) + \text{const.}$

ξ geht aus F durch Multiplikation des Integranden mit

$$\frac{2\varphi}{a^2 (b^2 \varphi + 1)} = \frac{2 (s - e_1)}{a^2 b^2 (s + 2e_1)} = \frac{2 (pu - e_1)}{a^2 b^2 (pu - pw)}$$

hervor, wobei w erklärt ist durch die Gleichung

$pw = -2 e_1 = -\frac{2}{3 b^2}$ Das Vorzeichen von p'w, über welches noch freie Verfügung besteht, sei so bestimmt, daß

$$p'w = \frac{1}{bi} \text{ ist. Es ist also}$$

$$\xi = -\frac{1}{2b} \int \frac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - pw} du. \text{ Da nun}$$

$$\frac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - pw} = pu - e_1 + \frac{1}{4 (pu - pw)} \text{ ist, so folgt}$$

$$\xi = \frac{2}{b} \left[\frac{\sigma'}{\sigma} u + e_1 u - \frac{1}{4 p'w} \left(2 u \frac{\sigma'}{\sigma} w - \log \frac{\sigma (u + w)}{\sigma (u - w)} \right) \right] + \text{const., also}$$

$$\xi = \frac{2}{b} \left[\frac{\sigma'}{\sigma} u + \frac{u}{3 b^2} - \frac{bui}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} w + \frac{bi}{4} \log \frac{\sigma (u + w)}{\sigma (u - w)} \right] + \text{const.}$$

Dem Werte $\varphi = 0$ entspricht $pu = e_1$, also $u = \omega_1$. Wird nun berücksichtigt, daß

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{\sigma'}{\sigma} \omega_1 = \frac{\sigma'}{\sigma} (u - \omega_1) - \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_1} \text{ ist, so folgt}$$

63) $$\xi = \frac{2}{b} \left[\frac{\sigma'}{\sigma} (u - \omega_1) + (u - \omega_1) \left(\frac{1}{3 b^2} - \frac{bi}{2} \right) \frac{\sigma'}{\sigma} w + \sqrt{\varphi + \frac{1}{4\varphi} + \frac{1}{b^2}} + \frac{bi}{4} \log \frac{\sigma (u + w)}{\sigma (u - w)} + \frac{b \eta w i}{2} + \frac{b \pi}{8} \right]$$

K ergibt sich aus ξ durch Multiplikation des Integranden mit

$$\frac{a^2 b^4 \varphi}{2(b^2\varphi + 1)} = \frac{a^2 b (pu - e_1)}{2(pu - pw)}$$

Es ergibt sich

$$64)\quad K = \frac{a^2 b}{2}\Big[3\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) - ib\left(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{4}\right)\Big(2(u-\omega)\frac{\sigma'}{\sigma}w - \log\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u-w)} - 2\eta w + \frac{b\pi i}{2}\Big) + \frac{2}{b^2}(u-\omega) + \frac{2b^2\varphi+3}{\varphi(b^2\varphi+1)}\sqrt{\varphi^3 + \frac{\varphi^2}{b^2} + \frac{\varphi}{4}}\Big]$$

Die Richtigkeit der Formeln 62—64 wird gewährleistet durch die Probe, die sich ergibt, wenn man nunmehr wieder zu dem Fall $b = 1$ übergeht. Durch die sich dann ergebenden Vereinfachungen gehen die Formeln in das System (60) über. Der Uebersichtlichkeit halber seien diese Vereinfachungen zusammengestellt

$$b = 1,\ pu = \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{u\pi}{2w}\right)} - \frac{1}{6} = \varphi + \frac{1}{3},\ \frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$e_1 = \frac{1}{3},\ pu - e_1 = \varphi,\ p'u = -\sqrt{\varphi}\,(2\varphi + 1),\ \frac{\sigma'}{\sigma}u = \sqrt{\varphi} + \frac{u}{6},\ \frac{\sigma'}{\sigma}w = -i + \frac{w}{6},\ pw = -\frac{2}{3},\ p'w = -i,\ \log\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u-w)} = \frac{uw}{3} + 2i\,\mathrm{arctang}\,\sqrt{\varphi},\ \cot\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) = \sqrt{2}\varphi,\ \eta_1 = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}},\ w = \sqrt{2}\,\arcsin\sqrt{-\frac{3}{4}}.$$

§ 7.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{2}{3}}$ erzeugte Kegel.

Es werde die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{2}{3}}$ untersucht, $n = -\frac{2}{3}$

Es ist $T(\varphi) = b^2\varphi^2 + \frac{4}{9}b^2 + \varphi^{\frac{2}{3}}$. Es werde gesetzt $\varphi^{\frac{2}{3}} = s$. Dann ist $d\varphi = \frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}ds$. Wird dann gesetzt $s = p(u; g_2, g_3), g_2 = -\frac{4}{b^2}, g_3 = -\frac{16}{9}$, so ergibt sich

$$F = \frac{3a^2b}{8}\int\frac{ds}{s^2\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}} = -\frac{3a^2b}{8}\int\frac{p'u^2\,du}{p^2u}$$

Ein unterelliptisch integrabler Fall tritt nicht auf.

v sei bestimmt durch die Gleichung $pv = O$. Da damit v nur bis auf das Vorzeichen bestimmt ist, kann über das Vorzeichen von $p'v$ noch verfügt werden.

$p'v = -\frac{4}{3}$. Ferner ist

$p''v = \frac{2}{b^2}$. So ergibt sich aus Formel 18)

$$\int\frac{p'u^2\,du}{p^2u} = -\frac{p'u}{pu} - \frac{3}{2b^2}\left(2u\frac{\sigma'}{\sigma}v - \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)$$

$$-6\frac{\sigma'}{\sigma}u.$$ Also ist

$$65)\quad F = \frac{9a^2}{8b}\left[-\frac{2b}{3\varphi^{\frac{2}{3}}}\sqrt{T(\varphi)} + \frac{1}{2}\psi(u,v) + 2b^2\frac{\sigma'}{\sigma}u\right] + \text{const.}$$

Das Integral wird, erstreckt bis $\varphi = \infty$, logarithmisch unendlich, erstreckt bis $\varphi = O$ von der Ordnung $\frac{2}{3}$ unendlich groß.

Für ξ ergibt sich $\xi = -\frac{3}{4b}\int\frac{p'u^2\,du}{p^2u + \frac{1}{b^2}}$

Es seien die Konstanten x und y durch die Gleichungen erklärt $px = \frac{i}{b}$ $py = -\frac{i}{b}$ und zwar seien die Vorzeichen von x und y so gewählt, daß

$p'x = p'y = -\frac{4}{3}$ ist. Dann ist

$$\frac{1}{p^2u + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{(pu-px)(pu-py)} = \frac{b}{2i}\left(\frac{1}{pu-px} - \frac{1}{pu-py}\right)$$

Demnach ist

$$\xi = \frac{3i}{8}\left[\int \frac{p'u^2}{pu-px}du - \int \frac{p'u^2}{pu-py}du\right]$$

Unter Berücksichtigung der Formel 19 ergibt sich aber, da $p''x = p''y = -\frac{4}{b^2}$ ist

$$\int \frac{p'u^2}{pu-px}du - \int \frac{p'u^2}{pu-py}du = -\frac{8i}{b}\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

$$-\frac{8u}{3}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}x - \frac{\sigma'}{\sigma}y\right) + \frac{4}{3}\log\frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)}$$

Daher ist $\xi = \frac{3}{b}\frac{\sigma'}{\sigma}u - iu\left(\frac{\sigma'}{\sigma}x - \frac{\sigma'}{\sigma}y\right)$

$$+\frac{i}{2}\log\frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)} + \text{const.}$$

Es sei wiederum gesetzt

$$Z = \frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u-y)\,\sigma(v+y)\,\sigma(v-x)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u+y)\,\sigma(v+x)\,\sigma(v-y)}$$ Dann ist

66) $$\xi = \frac{3}{b}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) + \frac{1}{b}\varphi^{-\frac{2}{3}}\sqrt{T\varphi} + \frac{2}{3}\varphi^{-\frac{2}{3}}$$

$$-i(u-v)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}x - \frac{\sigma'}{\sigma}y\right) + \frac{i}{2}\log Z$$

ξ wird, bis $\varphi = \infty$ erstreckt, unendlich groß.

Es ist $K = -\frac{3a^2b}{16}\int \frac{p^2u\,p'u^2}{\left(p^2u + \frac{1}{b^2}\right)^2}du.$

Hieraus folgt

67) $K = \frac{3a^2b}{4}\Big[\frac{5}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{5}{4b}\varphi^{-\frac{2}{3}}\sqrt{T(\varphi)} + \frac{5}{6}\varphi^{-\frac{2}{3}} + \frac{b}{4(1+b^2\varphi^{\frac{4}{3}})}\Big)\sqrt{T(\varphi)} - \frac{3}{8b^2}(u-v)\frac{\sigma'}{\sigma}(x+y)$

$$-\frac{bi}{6}(u-v)\frac{\sigma'}{\sigma}(x-y) - \frac{b^2}{9}(u-v) + \frac{bi}{12}\log Z + \frac{3}{16b^2}\log Z_1\Big]$$

wobei $Z_1 = \frac{\sigma(u+x)\,\sigma(u+y)\,\sigma(v-y)\,\sigma(v-x)}{\sigma(u-x)\,\sigma(u-y)\,\sigma(v+x)\,\sigma(v+y)}$ ist.

Für $\varphi = \infty$ wird auch K unendlich groß und zwar von der ersten Ordnung.

§ 8.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{3}}$ erzeugte Kegel.

Es werde die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{3}}$ betrachtet, $n = -\frac{1}{3}$ gesetzt. Dann wird

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-\frac{4}{3}}\sqrt{b^2\varphi^2 + \frac{b^2}{9} + \varphi^{\frac{4}{3}}}\,d\varphi.$$ Es werde gesetzt

$$\varphi^{\frac{2}{3}} = x, \text{ also } d\varphi = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx. \text{ Dann ist}$$

$$F = \frac{3a^2b}{4}\int \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4 + \frac{x^3}{b^2} + \frac{1}{9}}\,x\,dx.$$

Setzt man nun $x = \frac{1}{s}$, so folgt

$$F = -\frac{a^2b}{4}\int \frac{ds}{s^2}\sqrt{s^3 + \frac{9s}{b^2} + 9} =$$

$$-\frac{3a^2b}{8}\int \frac{1}{s^2}\sqrt{4s^3 + \frac{36}{b^2}s + 36}\,ds$$

Es sei gesetzt $g_2 = -\frac{36}{b^2}$, $g_3 = -36$, $s = p(u; g_2, g_3)$.

Dann ist $F = \frac{3a^2b}{8}\int \frac{p'u^2\,du}{p^2u}$. Es sei nun v ein Wert, für den $pv = O$ ist. Das Vorzeichen von $p'v$ kann dann noch beliebig fixiert werden, es sei $p'v = -6$. Dann ist

$$p''v = \frac{18}{b^2}\frac{p''v}{p'v} = -\frac{3}{b^2},\quad \frac{p''v}{p'v^3} = -\frac{1}{12b^2}$$

Nach Formel 18) ergibt sich daher

$$F = -\frac{3a^2b}{8}\left[\frac{p'u}{pu} + \frac{3}{b^2}\psi(u,v) + 6\frac{\sigma'}{\sigma}u\right] \text{ oder}$$

$$68)\quad F = -\frac{3a^2b}{8}\left[\frac{3}{b^2}\psi(u,v) + 6\frac{\sigma'}{\sigma}u - \sqrt{4\varphi^{-\frac{2}{3}} + \frac{36}{b^2}\varphi^{\frac{2}{3}} + 36\varphi^{\frac{4}{3}}}\right] + \text{const.}$$

ξ ergibt sich durch Multiplikation des Integranden mit

$$\frac{2}{a^2\left(b^2 + \varphi^{-\frac{2}{3}}\right)} = \frac{2}{a^2(pu + b^2)}$$

Es sei die Konstante w erklärt durch die Gleichung $pw = -b^2$. Das Vorzeichen von $p'w$ läßt sich dann noch beliebig fixieren, es sei $p'w = -2b^3 i$ gesetzt. Dann ist

$$p''w = 6b^4 + \frac{18}{b^2},\quad \frac{p'w}{pw} = 2bi.$$ Es ist nun

$\xi = \frac{3b}{4}\int \frac{p'u^2\,du}{p^2u\,(pu-pw)}$. Der Integrand wird entwickelt, es ist identisch

$$\frac{p'u^2}{p^2u\,(pu-pw)} = 4 + \frac{4pw}{pu} + \frac{4p^2w - g_2}{p^2u} + \frac{p'w^2}{p^2w}\left(-\frac{1}{pu} - \frac{pw}{p^2u} + \frac{1}{pu-pw}\right),\ \text{daher}\ \frac{p'u^2}{p^2u\,(pu-pw)} = 4 + \frac{1}{pu}\left(4pw - \frac{p'w^2}{p^2w}\right) + \frac{1}{p^2u}\left(4p^2w - g_2 - \frac{p'w^2}{pw}\right) + \frac{p'w^2}{p^2w}\frac{1}{pu-pw}$$

$$= 4 + \frac{36}{b^2 p^2 u} - 4\,b^2 \frac{1}{pu - pw}$$

Daher ist auf Grund der Formeln 15) und 16)

$$\xi = 3\Big[b\,u - \frac{1}{2b}\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{1}{4b}\frac{p'u}{pu} + \frac{3}{4\,b^3}\psi(u, v) - \frac{i}{2}\psi(u, w)\Big] + \text{const.}$$

Wenn die Zuordnung $\varphi = O$, $u = O$, $\xi = O$ gemacht wird, so verschwindet die Konstante, und man erhält

$$69)\quad \xi = 3\Big[b\,u - \frac{1}{2b}\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{3}{4\,b^3}\psi(u, v) - \frac{i}{2}\psi(u, w) + \frac{1}{2b}\sqrt{\varphi^{-\frac{2}{3}} + \frac{9}{b^2}\varphi^{\frac{2}{3}} + 9\varphi^{\frac{4}{3}}}\Big]$$

K gewinnt man, indem man den Integranden von ξ mit $\frac{a^2 b^4}{4(b^2 + s)} = \frac{a^2 b^4}{4(pu - pw)}$ multipliziert. Es ist dann

$$\frac{4K}{3a^2 b^5} = \int\Big[\frac{1}{pu - pw} + \frac{9}{b^2 p^2 u\,(pu - pw)} - \frac{b^2}{(pu - pw)^2}\Big]du.$$

Wird dem Werte $\varphi = O$, $u = O$ der Wert $K = O$ zugeordnet, so ergibt sich

$$70)\quad K = \frac{3a^2}{16}\Big[i\,\psi(u, w)\Big(\frac{9}{b^4} - b^2\Big) + \frac{9}{b}\psi(u, v) - 4b\frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\,b^3 u + L(\varphi)\Big],\ \text{wobei}$$

$$L(\varphi) = 2\,b\sqrt{\varphi^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{b_2}\varphi^2 + 9\varphi^{\frac{8}{3}}}\ \frac{2 + b^2\varphi^{\frac{2}{3}}}{1 + b^2\varphi^{\frac{2}{3}}}$$

§ 9.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-1}$ erzeugte Kegel.

Wenn $n = -1$ gesetzt wird, so ist

$$F = \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\varphi^2}\sqrt{b^2\varphi^2 + b^2 + 1}\, d\varphi$$

$$\xi = \int \frac{1}{1 + b^2\varphi^2}\sqrt{b^2\varphi^2 + b^2 + 1}\, d\varphi$$

$$K = \frac{a^2 b^4}{2}\int \frac{\varphi^2}{1 + b^2\varphi^2}\sqrt{b^2\varphi^2 + b^2 + 1}\, d\varphi.$$

Die Integrale sind also unterelliptisch. Es mögen daher nur die Ergebnisse der Rechnung angegeben werden. Es sei abkürzend gesetzt

$$\sqrt{b^2\varphi^2 + b^2 + 1} = Q$$

$$b^2\varphi^2 + \frac{1}{b} + \varphi Q = U$$

$$1 + U^2 = V$$

$$\frac{3(3b^2 - 1)}{b(b^2 + 1)} + 2\left(b - \frac{1}{b}\right)\log\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$+ 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2} + 1\right)\operatorname{arctang}\frac{1}{b} = A. \quad \text{Dann ist}$$

71) $$F = \frac{a^2 b}{2}\left[-\frac{1}{b\varphi}Q + \log(\varphi + Q)\right] + \text{const.}$$

Der unbestimmte Integralausdruck wird für $\varphi = 0$ und $\varphi = \infty$ unendlich groß.

72) $$\xi = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}U + \log V + \left(b - \frac{1}{b}\right)\operatorname{arctang} U\right.$$

$$\left. - \log\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) - \left(b - \frac{1}{b}\right)\operatorname{arctang}\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right]$$

73) $$K = \frac{a^2}{2}\left[U + 2\left(b - \frac{1}{b}\right)\log V + \frac{4(b^2 - 1)}{b}\frac{1}{V}\right.$$

$$\left. + 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2} + 1\right)\operatorname{arctang} U + \frac{4U}{b^2 V}(3b^2 - b^4 - 1) - A\right]$$

Dabei ist in den Formeln 72) 73) die Konstante so bestimmt, daß zu $\varphi = 0\ \xi = K = 0$ gehört.

§ 10.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-2}$ erzeugte Kegel.

Es werde die Spirale $r = a\varphi^{-2}$ betrachtet, $n = -2$ gesetzt. Dann ist

$$F = \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\varphi^4}\sqrt{b^2\varphi^4 + 4b^2\varphi^2 + 1}\,d\varphi \text{ oder}$$

$$F = \frac{a^2 b}{2}\int \frac{1}{\varphi^4}\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + \frac{1}{b^2}}\,d\varphi$$

$$\xi = \frac{1}{b}\int \frac{1}{\varphi^4 + \frac{1}{b^2}}\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + \frac{1}{b^2}}\,d\varphi$$

$$K = \frac{a^2 b}{2}\int \frac{\varphi^4}{\left(\varphi^4 + \frac{1}{b^2}\right)^2}\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + \frac{1}{b^2}}\,d\varphi$$

Ein unterelliptisch integrabler Fall tritt ein, wenn $b = \frac{1}{2}$ ist. Dann ist

$$F = \frac{a^2}{4}\int \frac{1}{\varphi^4}(\varphi^2 + 2)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(-\frac{1}{\varphi} - \frac{2}{3\varphi^3}\right) + \text{const.}$$

Da F für $\varphi = \infty$ nicht nach ∞ konvergiert, so werde dem Werte $\varphi = \infty$ der Wert $F = 0$ zugeordnet. Dann ist, wenn die Richtung der Messung, also auch das Vorzeichen umgedreht wird

$$74)\ F_0 = \frac{a^2}{4\varphi}\left(1 + \frac{2}{3\varphi^2}\right)$$

$$\xi = 2\int \frac{1}{4 + \varphi^4}(\varphi^2 + 2)\,d\varphi = \text{arctang}\,(1+\varphi) - \text{arctang}\,(1-\varphi) + \text{const.}$$

Wenn ξ vom Werte $\varphi = 0$ aus gemessen wird, ist

75) $\xi = \text{arctang}\,(1+\varphi) - \text{arctang}\,(1-\varphi) = \text{arctang}\,\frac{2\varphi}{2-\varphi^2}$

Als Winkel des gesamten Mantels ergibt sich daher

76) $\xi^* = \pi$

$$K = \frac{a^2}{4}\int \frac{\varphi^4}{(\varphi^4+4)^2}(\varphi^2+2)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int \frac{\varphi^2+2}{\varphi^4+4}\,d\varphi$$

$$- a^2\int \frac{\varphi^2+2}{(\varphi^4+4)^2}\,d\varphi. \quad \text{Daher ist}$$

77) $$K = \frac{a^2}{16}\left[\text{arctang}\,\frac{2\varphi}{2-\varphi^2} - \frac{1}{4}\log\frac{\varphi^2+2\varphi+2}{\varphi^2-2\varphi+2}\right]$$

Dabei ist die Konstante so bestimmt, daß zu $\varphi = 0$, $K = 0$ gehört. Es ergibt sich ferner

$\lim_{\varphi=\infty} K = \frac{\pi a^2}{16}$, also gleich dem 16ten Teil der Kugeloberfläche, durch die K begrenzt wird.

Denkt man sich den Kegelmantel auf die Ebene abgewickelt, so entsteht ein Flächenstück, das von einer Geraden A B und einer Kurve A B begrenzt wird. Die Winkel bei A und B sind 1 R und 2 R. Der Inhalt des Flächenstückes ist, da A B = q = 2 a ist, der 32te Teil des über A B als Durchmesser konstruierten Halbkreises.

Im allgemeinen Fall sind die Wurzeln der Funktion

$R(\varphi) = \varphi^4 + 4\varphi^2 + \frac{1}{b^2}$ die folgenden

$\alpha = \sqrt{c-2}, \beta = \sqrt{-c-2}, \gamma = -\sqrt{c-2}, \delta =$

$-\sqrt{-c-2}$ wobei $c = \sqrt{4 - \frac{1}{b^2}}$ Man setze nun

$\varphi - \alpha = \frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}$, wobei $s_0 = \frac{1}{6}(3c-4)$. Dann ist

$d\varphi = -\frac{c\sqrt{c-2}}{(s-s_0)^2}\,ds$. Es ist

$$R(\varphi)=(\varphi-\alpha)(\varphi-\beta)(\varphi-\gamma)(\varphi-\delta)=\frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}\left[\frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}+(\alpha-\beta)\right]$$

$$\left[\frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}+(\alpha-\gamma)\right]\left[\frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}+(\alpha-\delta)\right]$$

Indem man die Klammern rechts ausmultipliziert, erhält man

$$R(\varphi)=\frac{c^2(c-2)}{(s-s_0)^4}\left[4s^3-g_2 s-g_3\right], \text{ wenn}$$

$$g_2=\frac{16}{3}-c^2,\ g_3=\frac{64}{27}-\frac{2c^2}{3} \text{ gesetzt wird.}$$

Die Größen e_1 e_2 e_3 haben die Werte

$$e_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{4-c^2}$$

$$e_2=-\frac{2}{3}$$

$$e_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{4-c^2}$$ Es ist weiter

$$\sqrt{R(\varphi)}\,d\varphi=-\frac{c^2(c-2)}{(s-s_0)^4}\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}\,ds.$$ Setzt man

$$s=pu,\ p'u=-\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3},$$ so ist

$$\sqrt{R(\varphi)}\,d\varphi=\frac{c^2(c-2)}{(pu-s_0)^4}p'u^2\,du$$

Weiterhin ist $\varphi=a+\frac{c\sqrt{c-2}}{s-s_0}=\sqrt{c-2}\,\frac{s-(s_0-c)}{s-s_0}$

$$\varphi^4=(c-2)^2\left[\frac{pu-(s_0-c)}{pu-s_0}\right]^4.$$ Daher ist

$$\frac{1}{\varphi^4}\sqrt{R(\varphi)}\,d\varphi=\frac{c^2}{c-2}\,\frac{p'u^2\,du}{[pu-(s_0-c)]^4}=\frac{c^2}{c-2}\,\frac{p'u^2\,du}{(pu-pt)^4}$$

wobei t durch die Gleichung bestimmt ist

$$pt=-\frac{c}{2}-\frac{2}{3}.$$ Dann ist also

$$F = \frac{a^2 b c^2}{2(c-2)} \int \frac{p'u^2\, du}{(pu-pt)^4}$$

t ist bis jetzt nur modulo der Perioden und abgesehen vom Vorzeichen bestimmt. Es ergibt sich $p't = \pm\sqrt{-c^2(c+2)}$ Es sei t so gewählt, daß $p't = -ci\sqrt{c+2}$ ist. Es ergibt sich $p''t = 2c(c+2)$, $p'''t = (6c+8)\, ci\sqrt{c+2}$

$$2\,p't^4 - 4\,pt\,p't^2\,p''t - \frac{1}{6}\,p't\,p''t\,p'''t + \frac{1}{2}\,p''t^3 = 0$$

$$p''t^2 - 8\,pt\,p't^2 = \frac{8}{3}\,c^2(c+2)$$

$$\frac{p''t^2 - 8\,pt\,p't^2}{2\,p't^4} = \frac{4}{3c^2(c+2)},\quad \frac{p''t}{6\,p't^2} = -\frac{1}{3c}$$

Also folgt nach Formel 18)

$$F = \frac{a^2 b\, c^2}{2(c-2)}\left[-\frac{1}{3}\frac{p'u}{(pu-pt)^3} + \frac{4}{3c^2(c+2)}\left\{2\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{p'u}{pu-pt} + 2\,upt\right\} + \frac{1}{3c}\left\{-\frac{p'u}{(pu-pt)^2} + 2u\right\}\right] + \text{const.}$$

Nun war $pu = s_0 + \frac{c\sqrt{c-2}}{\varphi - \sqrt{c-2}}$, also $pu - pt = \frac{c\varphi}{\varphi - \sqrt{c-2}}$

$$p'u = -c\sqrt{c-2}\,\frac{\sqrt{R(\varphi)}}{(\varphi - \sqrt{c-2})^2},\ \text{also}\ \frac{p'u}{pu-pt} = -\frac{\sqrt{c-2}\sqrt{R(\varphi)}}{\varphi(\varphi - \sqrt{c-2})}$$

Demnach ist

$$78)\quad F = \frac{a^2 b}{6(c^2-4)}\left[L(\varphi) + 8\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{2}{3}(3c^2-8)u - A\right]$$

wo

$$L(\varphi) = \frac{1}{\varphi}\sqrt{c-2}\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + \frac{1}{b^2}}\left\{\frac{c+2}{\varphi^2}(\varphi - \sqrt{c-2}) - \frac{4}{\varphi - \sqrt{c-2}} - \frac{4}{c\varphi}\right\}$$

und A eine Integrationskonstante ist, die, wenn F vom Werte $\varphi = \infty$ aus gemessen werden soll, den Wert hat

$$A = \frac{1}{3\,c^2\,(c+2)}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\,v_0 - 4\sqrt{c-2} + 2\,v_0\left(c^2 - \frac{8}{3}\right)\right]$$

wenn dabei v_0 denjenigen Wert von u bezeichnet, für den $pv_0 = s_0$ ist.

ξ geht aus F hervor durch Multiplikation des Integranden mit

$$\frac{2}{a^2 b^2}\,\frac{\varphi^4}{\varphi^4 + \frac{1}{b^2}}$$

$$= \frac{2}{a^2 b^2}\,\frac{(c-2)^2\,(pu-pt)^4}{(pu-s_0)^4\left[(c-2)^2\,\frac{(pu-pt)^4}{(pu-s_0)^4} + (2+c)\,(2-c)\right]}$$

$$= \frac{2}{a^2 b^2}\,\frac{(c-2)\,(pu-pt)^4}{(c-2)\,(pu-pt)^4 - (2+c)\,(pu-s_0)^4}$$ Demnach ist

$$\xi = \frac{c^2}{b}\int \frac{p'u^2}{(c-2)\,(pu-pt)^4 - (c+2)\,(pu-s_0)^4}\,du$$

$$\xi = \frac{c^2}{b\,(c-2)}\int \frac{p'u^2}{(pu-pt)^4 - \frac{c+2}{c-2}(pu-s_0)^4}\,du$$

Der Nenner des Integranden verschwindet, wenn $pu-pt = \sqrt[4]{\frac{c+2}{c-2}}\,(pu-s_0)$, also $pu = \frac{pt - rs_0}{1-r}$ ist, falls $\sqrt[4]{\frac{c+2}{c-2}} = r$ gesetzt wird. Die 4 Werte der Wurzel seien bezeichnet mit $r_1 = r$ $r_2 = -r$ $r_3 = ri$ $r_4 = -ri$. r bedeute den Hauptwert. Es sei $\frac{pt - r_\lambda s_0}{1-r_\lambda} = m_\lambda$ gesetzt und x_λ sei bestimmt durch die Gleichung $px_\lambda = m_\lambda$. Dann hat der Nenner des Integranden den Wert

$$\frac{1}{\Pi\,(pu-px_\lambda)} = \Sigma\,\frac{a_\lambda}{pu-px_\lambda},\ \text{wobei}$$

$$a_1 = \frac{1}{(m_1-m_2)\,(m_1-m_3)\,(m_1-m_4)}$$

$$a_2 = \frac{1}{(m_2-m_1)\,(m_2-m_3)\,(m_2-m_4)}$$

$$a_3 = \frac{1}{(m_3-m_1)\,(m_3-m_2)\,(m_3-m_4)}$$

$$a_4 = \frac{1}{(m_4-m_1)\,(m_4-m_2)\,(m_4-m_3)}$$

Nun ist $m_\lambda - m_\mu = \frac{pt-r_\lambda s_0}{1-r_\lambda} - \frac{pt-r_\mu s_0}{1-r_\mu}$

$$= \frac{(pt-s_0)\,(r_\lambda - r_\mu)}{(1-r_\lambda)\,(1-r_\mu)}$$

$$m_\lambda - m_\mu = -\frac{c\,(r_\lambda - r_\mu)}{(1-r_\lambda)\,(1-r_\mu)}$$ Also ist

$$a_1 = -\frac{(1-r_1^2)\,(1-r_1)\,(1-r_2)\,(1-r_3)\,(1-r_4)}{c^3\,(r_1-r_2)\,(r_1-r_3)\,(r_1-r_4)} =$$

$$-\frac{1-r^4}{c^3}\,\frac{1-r_1^2}{(r_1-r_2)\,(r_1-r_3)\,(r_1-r_4)}$$

Es ist also $a_1 = \frac{r\,(1-r^2)}{c^3(c+2)}$ $a_2 = -\frac{r\,(1-r^2)}{c^3(c+2)}$

$a_3 = +\frac{r\,(1+r^2)\,i}{c^3\,(c+2)}$ $a_4 = -\frac{r\,(1+r^2)}{c^3(c+2)}\,i$. Demnach hat der Integrand den Wert

$$\frac{rp'u^2}{c^3(c+2)}\left[\frac{1-r^2}{pu-px_1} - \frac{1-r^2}{pu-px_2} + i\,\frac{1+r^2}{pu-px_3} - i\,\frac{1+r^2}{pu-px_4}\right]$$

Also $\xi = -\frac{br}{2}\int \Sigma\,\frac{\beta_\lambda\,p'u^2}{pu-px_\lambda}\,du$, wenn gesetzt wird

$\beta_1 = 1-r^2$ $\beta_2 = -(1-r^2)$ $\beta_3 = i(1+r^2)$ $\beta_4 = -i(1+r^2)$

Also ist nach Formel 19)

$$\xi = -\frac{br}{c}\left[\frac{2}{3}\,p'u\,\Sigma\beta_\lambda - 4\,\frac{\sigma'}{\sigma}\,u\,\Sigma\beta_\lambda p\,x_\lambda + 4\,u\,\Sigma\beta_\lambda\,p^2 x_\lambda\right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}\,g_2\,u\,\Sigma\beta_\lambda + \Sigma\,p'x_\lambda\,\beta_\lambda\,\psi\,(u, x_\lambda)\right] + \text{const.}$$

Nun ist aber $\Sigma\beta_\lambda = \Sigma\beta_\lambda\, px_\lambda = O$. Also ist

$$\xi = -\frac{br}{c}\left[4\,u\,\Sigma\beta_\lambda\, p^2x_\lambda + \Sigma\, p'x_\lambda\,\beta_\lambda\,\psi\,(u, x_\lambda)\right] + \text{const.}$$

Nun ist $\Sigma\beta_\lambda\, p^2x_\lambda = \frac{2c^2(c+2)}{r}$, also $\xi = 8\,bc\,(c+2)\,u$

$$-\frac{br}{c}\Sigma\,\beta_\lambda\, p'x_\lambda\,\psi\,(u, x_\lambda) + \text{const.}$$ Nun ist $px_1 = -\frac{2}{3}$

$$-\frac{c}{2}\frac{1+r_1}{1-r_1},\ 4p^3x_1 = -\frac{32}{27} - \frac{8c}{3}\frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$-2c^2\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)^2 - \frac{c^3}{2}\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)$$

$$-g_2\,px_1 = \frac{32}{9} + \frac{8c}{3}\frac{1+r_1}{1-r_1} \qquad -\frac{2}{3}c^2 - \frac{c^3}{2}\frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$-g_3 = \frac{64}{27} \qquad +\frac{2}{3}c^2, \text{ also}$$

$$p'x_1{}^2 = -2c^2\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)^2 - \frac{c^3}{2}\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)^3 - \frac{c^3}{2}\frac{1+r_1}{1-r_1} = \frac{4c^2r_1{}^2}{(1-r^1)^4}$$

demnach $p'x_\lambda = \frac{2c\,r_\lambda}{(1-r_\lambda)^2}$ Da nämlich die x_λ bisher nur auf das Vorzeichen genau fixiert waren, darf man hier über das Vorzeichen nach Belieben entscheiden. Nun ist

$$\beta_1\, p'x_1 = \frac{1+r}{1-r}\cdot 2cr \qquad \beta_2\, p'x_2 = \frac{1-r}{1+r}\cdot 2cr$$

$$\beta_3\, p'x_3 = \frac{1-r}{1+r}\cdot 2cr \qquad \beta_4\, p'x_4 = -\frac{1-ri}{1+ri}\cdot 2cr, \text{ also}$$

$$\beta_\lambda\, p'x_\lambda = 2cr\,\gamma_\lambda, \text{ wenn}$$

$$\gamma_1 = \frac{1+r}{1-r} \qquad \gamma_2 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\gamma_3 = -\frac{1+ri}{1-ri} \quad \gamma_4 = -\frac{1-ri}{1+ri} \text{ gesetzt wird. Dann ist}$$

$$\xi = 8\,bc\,(c+2)\,u - 2\,br^2\,\Sigma\,\gamma_\lambda\,\psi\,(u, x_\lambda) + \text{const.}$$

Bestimmt man die Konstante so, daß zu $\varphi = 0$, $\xi = 0$ gehört, so ergibt sich

$$79)\quad \xi = 8\,bc\,(c+2)\,(u-t) - 2\,b\,\sqrt{\frac{c+2}{c-2}}\,\Sigma\,\gamma_\lambda\Big[\psi\,(u, x_\lambda) - \psi\,(t, x_\lambda)\Big]$$

Wird die Integration über den ganzen Mantel erstreckt, so ergibt sich

$$80)\quad \lim_{\varphi = \infty} \xi = 8\,bc\,(c+2)\,(v_0 - t) - 2b\sqrt{\frac{c+2}{c-2}}\,\Sigma\,\gamma_\lambda\Big[\psi\,(v_0, x_\lambda) - \psi\,(t, x_\lambda)\Big]$$

Inbetreff der x_γ, die ja durch die getroffenen Festsetzungen nur modulo der Perioden bestimmt sind, mag übrigens bemerkt sein, daß die nähere Berechnung ergibt

$$p\,(x_1 - x_2) = p\,(x_3 - x_4),\ p'\,(x_1 - x_2) = -\,p'\,(x_3 - x_4),$$

$$\text{d. h. } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Von der Berechnung von K möge abgesehen werden, da die Rechnung zwar grundsätzlich keine Schwierigkeiten bietet, aber hier zu weit führen würde.

§ 11.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-1\frac{1}{2}}$ erzeugte Kegel.

Es werde die Spirale $r = a\varphi^{-1\frac{1}{2}}$ betrachtet, also $n = -1\frac{1}{2}$ gesetzt. Dann ist

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-3}\cdot\sqrt{b^2\varphi^3 + \frac{9}{4}b^2\varphi + 1}\,d\varphi$$

$$F = \frac{a^2 b}{4}\int \frac{1}{\varphi^3}\sqrt{4\varphi^3 + 9\varphi + \frac{4}{b^2}}\,d\varphi.$$ Es werde also gesetzt

$\varphi = p\,(u;\ g_2,\ g_3)$, $g_2 = -9$, $g_3 = -\frac{4}{b^2}$. Dann ist

$$F = -\frac{a^2 b}{4}\int \frac{p'u^2\,du}{p^3u}$$

$$\xi = -\frac{1}{2b}\int \frac{p'u^2\,du}{p^3u + \frac{1}{b^2}}$$

$$K = -\frac{a^2 b}{4}\int \frac{p'u^2\,p^3u}{\left(p^3u + \frac{1}{b^2}\right)^2}\,du.$$

Ein unterelliptisch integrabler Fall tritt nicht auf. v sei ein Wert des Argumentes, für den pu verschwindet. Dann ist $pv = 0$, $p'v = -\frac{2}{b}$, $p''v = \frac{9}{2}$, $p'''v = 0$. Aus der Formel 18) folgt dann sofort

$$81)\quad F = \frac{3a^2b^3}{4}\left[3\frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{u}{b^2} - \frac{27b}{64}\psi(u,v) - \left(\frac{1}{6b^2\varphi} + \frac{3}{16}\right)\sqrt{4\varphi + \frac{9}{\varphi} + \frac{4}{b^2\varphi^2}}\right]$$

Die Konstante ist dabei so bestimmt, daß dem Werte $\psi = \infty$ der Wert $F = 0$ zugeordnet wird.

Weiter ist $\xi = -\frac{1}{2b}\int \frac{p'u^2\,du}{p^3u + \frac{1}{b^2}}$ Bezeichnet man nun mit $r_1\ r_2\ r_3$ die kubischen Einheitswurzeln, setzt also

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right),\ r_3 = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$$

und setzt man $m_\lambda = -b^{-\frac{2}{3}} r_\lambda$, so verschwindet der Nenner des Integranden für $pu = m_\lambda$ ($\lambda = 1,2,3$). Es ist also

$$\frac{1}{p^3u + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{3}b^{\frac{4}{3}}\Sigma\frac{r_\lambda}{pu - m_\lambda}.$$ Also ist

$$\xi = -\frac{1}{6}b^{\frac{1}{3}}\Sigma\int\frac{r_\lambda\,p'u^2}{pu - m_\lambda}\,du.$$ Es sei t_λ definiert durch die

Gleichung $pt_\lambda = m_\lambda$. Dann ist nach Formel 18)

$$\int \frac{p'u^2\,du}{pu - pt_\lambda} = \frac{2}{3}\,p'u - 4\,pt_\lambda \frac{\sigma'}{\sigma}\,u + u\left(4\,p^2t_\lambda - \frac{2}{3}g_2\right)$$

$$+ p't_\lambda\,\psi\left(u, t_\lambda\right)$$

Da nun $\Sigma r_\lambda = 0$ und $\Sigma r_\lambda\, pt_\lambda = -\,b^{-\frac{2}{3}}\Sigma r_\lambda^{\,2}$

$= 0$ und $\Sigma r_\lambda\, p^2t_\lambda = b^{-\frac{4}{3}}\Sigma r_\lambda^{\,3} = 3\,b^{-\frac{4}{3}}$ ist, so folgt

$$\xi = -\frac{1}{6}\,b^{\frac{1}{3}}\left[12\,u\,b^{-\frac{4}{3}} + \Sigma r_\lambda\, p't_\lambda\,\psi\left(u, t_\lambda\right)\right] + \text{const.}$$

Nun ist $4\,p^3t_\lambda - g_2\,pt_\lambda - g_3 = 9\,pt_\lambda$, also $p't_\lambda =$

$$-3\sqrt{-\,b^{-\frac{2}{3}}\,r_\lambda}$$

$$p't_\lambda = -\,3\,b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{-r_\lambda}\;\; r_\lambda\, p't_\lambda = -\,3\,b^{-\frac{1}{3}}\,r_\lambda\sqrt{-r_\lambda}$$

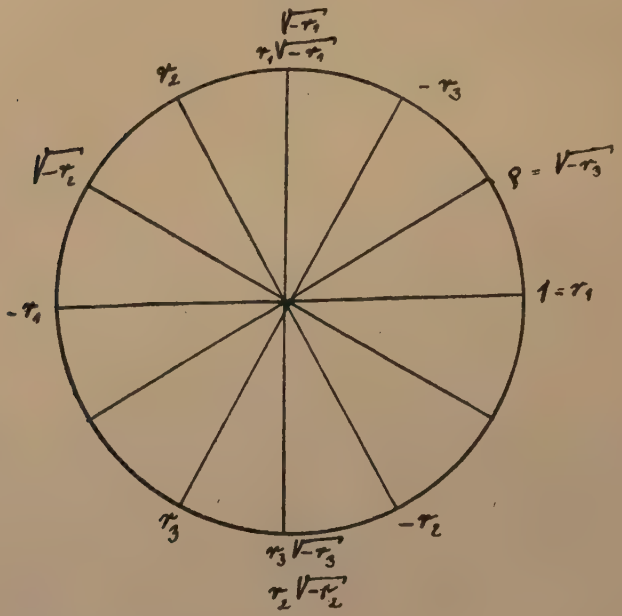
Demnach ist $\xi = -\frac{2u}{b} + \frac{1}{2}\,\Sigma r_\lambda\sqrt{-r_\lambda}\left[2u\frac{\sigma'}{\sigma}\,t_\lambda\right.$

$$\left. - \log\frac{\sigma\,(u+t_\lambda)}{\sigma\,(u-t_\lambda)}\right] + \text{const.}$$

(Ob nämlich $\sigma\,(u-t_\lambda)$ oder $\sigma\,(t_\lambda-u)$ geschrieben wird, ist der Integrationskonstanten wegen ohne Belang.) Durch die Gleichungen $pt_\lambda = -\,b^{-\frac{2}{3}}\,r_\lambda$, ist jedes t_λ erstens nur modulo der Perioden, zweitens auch nur abgesehen vom Vorzeichen bestimmt. Das Vorzeichen werde fixiert durch die Bestimmung, daß in der Gleichung

$p't_\lambda = -\,3\,b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{-r_\lambda}$ dem Werte $\sqrt{-r_\lambda}$ der Hauptwert beizulegen sei. Es werde gesetzt $e^{\frac{\pi i}{6}} = \rho$. Dann ergibt sich folgende Tabelle

$$r_1 = 1, \quad -r_1 = \rho^6 \quad \sqrt{-r_1} = \rho^3 = i \quad r_1\sqrt{-r_1} = \rho^3 = i$$
$$r_2 = \rho^4, \quad -r_2 = \rho^{10} \quad \sqrt{-r_2} = \rho^5 \quad r_2\sqrt{-r_2} = \rho^9 = -i$$
$$r_3 = \rho^8, \quad -r_3 = \rho^2 \quad \sqrt{-r_3} = \rho \quad r_3\sqrt{-r_3} = \rho^9 = -i$$



Es ist also nun

$$\xi = -\frac{2u}{b} + \frac{ui}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}t_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_2 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_3\right)$$
$$-\frac{i}{2}\log\frac{\sigma(u+t_1)\,\sigma(u-t_2)\,\sigma(u-t_3)}{\sigma(u-t_1)\,\sigma(u+t_2)\,\sigma(u+t_3)} + \text{const.}$$

Ordnet man dem Werte $\varphi = \infty$ den Wert $\xi = 0$ zu, so ergibt sich

$$\xi = -\frac{2u}{b} + \frac{ui}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}t_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_2 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_3\right)$$
$$-\frac{i}{2}\log\frac{\sigma(u+t_1)\,\sigma(u-t_2)\,\sigma(u-t_3)}{\sigma(u-t_1)\,\sigma(u+t_2)\,\sigma(u+t_3)} - \frac{\pi}{2}$$

oder auch

$$82)\quad \xi = -\frac{2u}{b} + \frac{ui}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}t_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_2 - \frac{\sigma'}{\sigma}t_3\right)$$

$$-\frac{i}{2}\log\frac{\sigma(t_1+u)\,\sigma(t_2-u)\,\sigma(t_3-u)}{\sigma(t_1-u)\,\sigma(t_2+u)\,\sigma(t_3+u)}$$

Diesem Ergebnis kann noch eine andere Form gegeben werden. Es ist nämlich

$$\frac{\sigma'}{\sigma}t_2 + \frac{\sigma'}{\sigma}t_3 = \frac{\sigma'}{\sigma}(t_2+t_3) - -\frac{1}{2}\frac{p't_2 - p't_3}{pt_2 - pt_3}, \text{ aber}$$

$$\frac{p't_2 - p't_3}{pt_2 - pt_3} = -\frac{3b^{-\frac{1}{3}}(\sqrt{-r_2} - \sqrt{-r_3})}{b^{-\frac{2}{3}}(r_3 - r_2)} = 3b^{\frac{1}{3}}\,i, \text{ also}$$

$$83)\quad \frac{\sigma'}{\sigma}t_2 + \frac{\sigma'}{\sigma}t_3 = \frac{\sigma'}{\sigma}(t_2+t_3) - \frac{3}{2}b^{\frac{1}{3}}\,i. \quad \text{Ferner ist}$$

$$84)\quad \frac{\sigma'}{\sigma}t_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}(t_2+t_3) = \frac{\sigma'}{\sigma}(t_1 - t_2 - t_3)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p't_1 + p'(t_2+t_3)}{pt_1 - p(t_2+t_3)}$$

Der Wert von $p'(t_2+t_3)$ ergibt sich aus der Gleichung

$p'(t_2+t_3) = Z(t_2,t_3)\,p't_2 + Z(t_3,t_2)\,p't_3$, wobei

$$Z(t_2,t_3) = \frac{p't_3{}^2}{(pt_3 - pt_2)^3} - \frac{1}{2}\frac{p''t_3}{(pt_3 - pt_2)^2}$$

Es ist $pt_3 - pt_2 = b^{-\frac{2}{3}}(r_2 - r_3) = b^{-\frac{2}{3}}\sqrt{3}$

$p't_3{}^2 = -9\,b^{-\frac{2}{3}}r_3 \quad p''t_3 = 6\,b^{-\frac{4}{3}}\rho^4 + \frac{9}{2}$. Demnach ist

$$Z(t_2\,t_3) = \frac{1}{(1-\rho^4)^3}\left[-9\,b^{\frac{4}{3}}\rho^8 - (3\rho^4 + \frac{9}{4}b^{\frac{4}{3}})(\rho^4 - \rho^8)\right]$$

$$Z(t_2,t_3) = \frac{3b^{\frac{4}{3}}}{(1-\rho^4)^3}\left[-3\rho^8 - b^{-\frac{4}{3}}\rho^8\right.$$

$$-\frac{3}{4}\rho^4+3b^{-\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}\rho^8\Big]. \text{ Ebenso ist}$$

$$Z(t_3,t_2)=\frac{3b^{\frac{4}{3}}}{(1-\rho^4)^3}\Big[3\rho^4-b^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}\rho^4+b^{-\frac{4}{3}}\rho^4+\frac{3}{4}\rho^8\Big]$$

Daraus folgt $p'(t_2+t_3)=\frac{3\rho}{(1-\rho^4)^2}\left(\frac{27}{4}b+6b^{-\frac{1}{3}}\right)$ oder

85) $p'(t_2+t_3)=i\left(\frac{27}{4}b+6b^{-\frac{1}{3}}\right)$. Ferner muß $p(t_2+t_3)$ berechnet werden. Es ergibt sich aus der Formel

$$p(t_2+t_3)=\frac{1}{4}\left[\frac{p't_2-p't_3}{pt_2-pt_3}\right]^2-pt_2-pt_3. \text{ Es folgt}$$

86) $p(t_2+t_3)=-\frac{9}{4}b^{\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}$ Daher ist

$$87)\ \frac{p't_1+p'(t_2+t_3)}{pt_1-p(t_2+t_3)}=\frac{3b^{-\frac{1}{3}}i+\frac{27}{4}bi}{\frac{9}{4}b^{\frac{2}{3}}}=\frac{4i}{3b}+3b^{\frac{1}{3}}i$$

Also liefert 84) mit Berücksichtigung von 87)

$$88)\ \frac{\sigma'}{\sigma}t_1-\frac{\sigma'}{\sigma}(t_2+t_3)=\frac{\sigma'}{\sigma}(t_1-t_2-t_3)-\frac{2i}{3b}-\frac{3}{2}b^{\frac{1}{3}}i.$$

Also ergibt sich

$$\frac{\sigma'}{\sigma}t_1-\frac{\sigma'}{\sigma}t_2-\frac{\sigma'}{\sigma}t_3=\frac{\sigma'}{\sigma}(t_1-t_2-t_3)--\frac{2i}{3b} \text{ und daher}$$

$$89)\ \xi=-\frac{5u}{b}+\frac{ui}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(t_1-t_2-t_3)$$
$$-\frac{i}{2}\log\frac{\sigma(t_1+u)\,\sigma(t_2-u)\,\sigma(t_3-u)}{\sigma(t_1-u)\,\sigma(t_2+u)\,\sigma(t_3+u)}$$

Erstreckt man ξ über den ganzen Mantel und ändert um einen positiven Wert zu erhalten, das Vorzeichen, so folgt

$$90)\quad \xi_1 = \frac{5v}{b} - \frac{vi}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(t_1 - t_2 - t_3) + \frac{i}{2}\log\frac{\sigma(t_1+u)\,\sigma(t_2-u)\,\sigma(t_3-u)}{\sigma(t_1-u)\,\sigma(t_2+u)\,\sigma(t_3+u)}$$

$$\text{Es ist } K = -\frac{a^2 b}{4}\int \frac{p'u^2\, p^3u}{\left(p^3u + \frac{1}{b^2}\right)^2}\,du$$

Es werde dem Werte $\varphi = \infty$ der Wert $K = O$ zugeordnet. Es sei

$$91)\quad \Sigma r_\lambda \sqrt{-r_\lambda}\,\psi(u, t_\lambda) = i\Big[\psi(u, t_1) - \psi(u, t_2) - \psi(u, t_3)\Big] = i\,M(u)$$

$$92)\quad \Sigma\sqrt{-r_\lambda}\,\psi(u, t_\lambda) = i\psi(u, t_1) + e^{\frac{5}{6}\pi i}\psi(u, t_2) + e^{\frac{1}{6}\pi i}\psi(u, t_3) = N(u)$$

$$93)\quad \frac{pu\,p'u}{p^3u + \frac{1}{b^2}} = -\frac{\varphi}{\varphi^3 + \frac{1}{b^2}}\sqrt{4\varphi^3 + 9\varphi + \frac{4}{b^2}} = L(\varphi)$$

gesetzt. Dann ergibt eine Berechnung, von der nur das Ergebnis angegeben werden möge:

$$94)\quad K = \frac{a^2 b}{12}\left[-10\,u + L(\varphi) + \frac{3}{2}\,bi\,M(u) + \frac{2}{3}\,b^{-\frac{1}{3}}N(u)\right]$$

§ 12.

Der durch die Spirale $r = a\varphi^{-3}$ erzeugte Kegel. Setzt man $n = -3$, so wird

$$T(\varphi) = b^2\varphi^2 + 9b^2 + \varphi^{-4}$$

$$F = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{-4}\sqrt{b^2\varphi^2 + 9b^2 + \varphi^{-4}}\,d\varphi.$$

Es sei gesetzt $\varphi^2 = \frac{1}{s}$. Dann ist

$$F = -\frac{a^2}{8}\int \sqrt{4s^3 + 36b^2 s + 4b^2}\, ds$$

$g_2 = -36b^2$, $g_3 = -4b^2$, $s = pu$

$$F = \frac{a^2}{8}\int p'u^2\, du. \quad \text{Nun ist}$$

$$\int p'u^2\, du = \frac{2}{5} pu\, p'u + \frac{2g_2}{5}\frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{3g_3}{5} u, \text{ daher}$$

$$F = \frac{a^2}{20}\left[pu\, p'u - 36b^2\frac{\sigma'}{\sigma} u + 6b^2 u\right] + \text{const.}$$ Bezeichnet man mit v einen Wert, für den $pv = 0$ ist und fixiert das Vorzeichen so, daß $p'v = -2b$ ist, so gehört zu $\varphi = \infty$, $s = 0$, $u = v$. F nimmt also für $\varphi = \infty$ den Wert an

$$F = \frac{a^2}{20}\left[-36b^2\frac{\sigma'}{\sigma} v + 6b^2 v\right] + \text{const.}$$ Wenn man also F von $\varphi = \infty$ aus mißt und das Vorzeichen umkehrt, so folgt

95) $$F = \frac{a^2 b^2}{20}\left[36\left(\frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{\sigma'}{\sigma} v\right) - 6(u-v) + L(\varphi)\right],$$ wobei

$$L(\varphi) = \frac{1}{b^2}\varphi^{-5}\sqrt{4 + 36b^2\varphi^4 + 4b^2\varphi^6} \text{ ist.}$$

ξ geht aus F hervor durch Multiplikation des Integranden mit $\frac{2}{a^2(b^2+s^3)}$ Demnach ist $\xi = \frac{1}{4}\int \frac{p'u^2\, du}{p^3u + b^2}$

$$4\xi = \int \frac{4p^3u + 36b^2}{p^3u + b^2}\frac{pu + 4b^2}{}\, du = 4u + 36b^2\int \frac{pu\, du}{p^3u + b^2}$$

$$\frac{\xi - u}{9b^2} = \int \frac{pu\, du}{p^3u + b^2}.$$ Sind nun r_1, r_2, r_3 die dritten Einheitswurzeln und setzt man $m_\lambda = -b^{\frac{2}{3}} r_\lambda$, so ist analog § 11

$$\frac{\xi - u}{9\,b^2} = \frac{1}{3}\,b^{-\frac{4}{3}} \Sigma r_\lambda \int \frac{pu\,du}{pu - m_\lambda}$$ Nun ist

$$\int \frac{pu\,du}{pu - m_\lambda} = u + m_\lambda \int \frac{du}{pu - m_\lambda}$$ Daher ist

$\frac{u-\xi}{3\,b^{\frac{4}{3}}} = \Sigma r_\lambda^{\,2} \int \frac{du}{pu - pt_\lambda}$, wenn mit t_λ ein Wert bezeichnet wird, für den $pt_\lambda = m_\lambda$ ist. Das Vorzeichen von $p't_\lambda$ kann beliebig fixiert werden. Es sei $p't_\lambda = -\,6b^{\frac{4}{3}}\sqrt{-r_\lambda}$, wobei der Wurzel der Hauptwert beigelegt ist. Dann ergibt sich nach 15)

$$\frac{u-\xi}{3\,b^{\frac{4}{3}}} = -\,\Sigma \frac{r_\lambda^{\,2}}{6\,b^{\frac{4}{3}}\sqrt{-r_\lambda}}\,\psi(u, t_\lambda) + \text{const.}$$

$$2\,(u-\xi) = \Sigma\, r_\lambda \sqrt{-r_\lambda}\,\psi(u, t_\lambda) + \text{const.}$$

$$2(u-\xi) = i\Big[\psi(u, t_1) - \psi(u, t_2) - \psi(u, t_3)\Big] + \text{const.}$$

Wenn man entsprechend, wie bei F das Vorzeichen umdreht, so ergibt sich

96) $$\xi = u + \frac{1}{2}\,i\Big[\psi(u, t_1) - \psi(u, t_2) - \psi(u, t_3)\Big] - C$$

Dabei ist $$C = v + \frac{1}{2}\,i\Big[\psi(v, t_1) - \psi(v, t_2) - \psi(v, t_3)\Big]$$

C gibt dabei auch den Winkel des ganzen Mantels von $\varphi = O$ bis ∞ an.

Von der Berechnung von K möge wie in § 10 abgesehen werden.

§ 13.

Spezielle Fälle hyperelliptischer Integrale.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen soll nun der Frage, die am Schluß des § 1 aufgeworfen wurde, näher getreten werden. Sie lautete: „Gibt es außer den abgehandelten Werten von n noch andere, die einen gewissen speziellen Wert von b zulassen derart, daß für diesen Wert der Flächeninhalt F des Spiralkegels elliptisch integrabel ist? Und welches sind diese speziellen Werte von n und b?"

Wir stützen uns auf Gleichung

$$14)\quad F = \frac{a^2 q}{4} \int y^{\frac{p}{2}} \sqrt{b^2 y^q + b^2 n^2 + y^{p+q}}\, dy.$$

Eine Gradreduktion kann nur eintreten, wenn $U(y) = y^q + n^2 + \frac{1}{b^2} y^{p+q}$ das Quadrat eines Linearfaktors enthält, also mit $U'(y) = q\, y^{q-1} + \frac{p+q}{b^2} y^{p+q-1}$ einen gemeinsamen Teiler hat. Dieser müßte auch enthalten sein in $(p+q)\, U - y\, U' = p y^q + (p+q)\, n^2$, also in $y^q + \frac{p\,(p+q)}{q^2}$. Daraus, daß der gemeinsame Teiler in U' stecken muß, aber keine Potenz von y sein kann, folgt durch Division durch y^{q-1}, daß der fragliche Teiler auch enthalten sein muß in $y^p + \frac{q\, b^2}{p+q}$. Der gesuchte Teiler steckt also in den beiden Funktionen $y^q + C_1$ und $y^p + C_2$, wo $C_1 = \frac{p\,(p+q)}{q^2}$, $C_2 = \frac{q\, b^2}{p+q}$ ist. In dem Falle, daß p negativ ist, geht die 2. Funktion, wenn $p = -p'$ gesetzt wird,

über in $y^{p'} + \frac{1}{C_2}$, abgesehen von einer Potenz von y als Faktor, ändert also ihren Charakter nicht. Die beiden Funktionen können also jedenfalls, ob p negativ oder positiv ist, nur einen in y linearen Teiler gemeinsam haben, wie aus der Theorie der Einheitswurzeln folgt. Dieser gemeinsame Teiler müßte sein

$$y-(-C_1)^{\frac{1}{q}} = y-(-C_2)^{\frac{1}{p}}.$$ Es muß also sein

$$(-C_1)^{\frac{1}{q}} = (-C_2)^{\frac{1}{p}}, \text{ also } (-C_1)^{p} = (-C_2)^{q}$$

$$(-1)^{p-q} \frac{p^{\frac{p}{2p}}(p+q)^{\frac{p}{2p}}}{q^{\frac{q}{2q}}} = \frac{q^{\frac{q}{2q}} b}{(p+q)^{\frac{q}{2q}}}$$

$$97)\quad b^{2q} = (-1)^{p-q} \frac{(p+q)^{\frac{p+q}{2p+q}} p^{\frac{p}{2p+q}}}{q}$$

Man kann nun in Rücksicht auf die beiden Transformationen, die $n = \frac{p}{q}$ in sich zuläßt, alle Fälle ableiten aus denjenigen, für die $\frac{p}{q} > -\frac{1}{2}$ und $\frac{p}{q} < 1$ ist.

I. Es sei p positiv. Dann ist das Vorzeichen der rechten Seite durch $(-1)^{p-q}$ bestimmt. Damit b reell wird, müssen also p und q entweder beide gerade oder beide ungerade sein. Der Teilerfremdheit wegen ist nur das zweite möglich. Es ist in diesem Falle

$$F = \frac{a^2 q}{4} \int y^{\frac{p-3}{2}} \sqrt{b^2 y^{q+1} + b^2 n^2 y + y^{p+q+1}}\, dy.$$

Da nach der Abspaltung des Faktors der Grad des Radikanden $p+q-1$ ist, so muß $p+q \leqq 5$ sein. Da $p<q$ ist, so bleibt nur

1) $q=3,\ p=1,\ n=\frac{1}{3}$. Es ist dann $b=4^{\frac{2}{3}}\ 3^{-\frac{5}{6}}$

Der Faktor, der sich vor die Wurzel stellen läßt, heißt $y+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, und man gewinnt

$$F=\frac{3\,a^4}{4}\int y^{-1}\left[y+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\sqrt{y^3-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}y^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}}}\,dy$$

Entsprechend gewinnt man durch die Transformationen von n die Werte

2) $n=3,\ b^2=3^3\cdot 4^4,\ b=48\sqrt{3}$

$$F=\frac{a^2}{2}\int z^2(z^2+12)\sqrt{z^4-24\,z^2+432}\,dz$$

3) $n=-\frac{4}{3},\ b=3^{\frac{5}{6}}\,2^{-\frac{4}{3}}$

$$F=\frac{3\,a^2}{4}\int y^{-4}\left[y+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot$$

$$\sqrt{3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{8}{3}}y^3-\frac{3}{2}y^2+3^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}y}\,dy.$$

4) $n=-\frac{3}{4},\ b=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{3}{8}}$

$$F=a^2\int y^{-3}\left[y+\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$\sqrt{2.3^{-\frac{3}{4}}y^3-2.3^{-\frac{1}{2}}y^2+2^{-1}\cdot 3^{-\frac{3}{4}}y}\,dy$$

5) $n=-\frac{1}{4},\ b=2^{-\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{8}}$

$$F=a^2\int y^{-2}\left[y+\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$\sqrt{2^{-1}\cdot 3^{\frac{3}{4}}y^3-2^{-1}y^2+2^{-2}\cdot 3^{\frac{1}{4}}y}\,dy$$

6) $n=-4$ $b=\frac{1}{48\sqrt{3}}$

$$F=\frac{a^2\sqrt{3}}{288}\int \eta^{-8}(\eta^2+12)\sqrt{\eta^4-8\eta^2+48}\,d\eta$$

II Es sei p negativ. Es werde gesetzt $p=-s$. Dann ist

$$b^{2q}=(-1)^q\frac{(q-s)^{q-s}\,s^{-s}}{q^{q-2s}}$$

Alle Fälle können wiederum abgeleitet werden aus den Fällen $s<q$. Dann muß, damit b reell wird, q gerade sein, also s ungerade. Es wird

$$F=\frac{a^2q}{4}\int y^{\frac{-s-3}{2}}\sqrt{b^2y^{q+1}+b^2n^2y+y^{q-s+1}}\,dy$$

Der Grad ist $q+1$. Nach Abspaltung des Faktors ist er $q-1$, also muß $q\leq 5$ sein. Da q gerade ist, so bleiben $q=2$ und $q=4$. $q=2$ bedingt $s=1$, $n=-\frac{1}{2}$. Dieser Fall ist in § 6 behandelt worden. Es bleibt demnach nur $n=-\frac{1}{4}$ und $n=-\frac{3}{4}$, das sind die Fälle I, 5 und I, 4.

Nur in den behandelten 6 Fällen degenerieren also die hyperelliptischen Integrale.

Inhalt.

§ 1. Problemstellung und allgemeine Lösung.
§ 2. Bestimmung einiger elliptischer Integrale.
§ 3. Die Archimedische Spirale.
§ 4. Die Spirale $r = a\varphi^{\frac{1}{2}}$
§ 5. Die Spirale $r = a\varphi^{2}$
§ 6. Die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{2}}$
§ 7. Die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{2}{3}}$
§ 8. Die Spirale $r = a\varphi^{-\frac{1}{3}}$
§ 9. Die Spirale $r = a\varphi^{-1}$
§ 10. Die Spirale $r = a\varphi^{-2}$
§ 11. Die Spirale $r = a\varphi^{-1\frac{1}{2}}$
§ 12. Die Spirale $r = a\varphi^{-3}$
§ 13. Spezielle Fälle hyperelliptischer Integrale.

Benutzte Literatur: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstraß, bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz. 2. Ausg. 1. Abt. Berlin. Julius Springer 1893.

Lebenslauf.

Ich wurde am 5. Mai 1884 in Posen als Sohn des Landgerichtsrats *Alexander Czwalina* geboren. Ich bin preußischer Staatsangehöriger und evangelischen Bekenntnisses. Ich besuchte das Königliche Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Posen und das Königliche Prinz-Heinrichs-Gymnasium zu Schöneberg bei Berlin, bestand Ostern 1902 an diesem die Reifeprüfung. Ich studierte von Ostern 1902 bis Ostern 1903 an der Universität Berlin, von Ostern 1903 bis Herbst 1903 an der Universität Marburg, von Herbst 1903 bis Ostern 1906 an der Universität Berlin Philosophie. Meine akademischen Lehrer in Berlin waren die Herren Professoren:

Blasius, Delbrück, v. Drygalski, Frobenius, Hensel, Knoblauch, Landau, Lehmann-Filhés, Münch, Passarge, Paulsen, Planck, Frhr. *v. Richthofen, Riehl, Schottky, Schur, H. A. Schwarz, Simmel, Stumpf, E. Warburg;*

in Marburg die Herren Professoren:

v. Dalwigk, Hensel, Jung, Richarz, Sieveking.

Ihnen allen, insbesondere den Herren Professoren *Hensel* und *H. A. Schwarz,* sei auch an dieser Stelle mein tief empfundener Dank ausgesprochen.

Ich bestand 1906 die Prüfung für das höhere Lehramt in Berlin. Von Ostern 1910 bis Ostern 1919 war ich Oberlehrer am Friedrichs-Werderschen Gymnasium in Berlin, seit Ostern 1919 bin ich Direktor der städtischen Oberrealschule in Allenstein.

Am Feldzuge nahm ich als Reserve-Offizier des Infanterie-Regiments Nr. 83 teil.

Ich bestand das Rigorosum am 2. Oktober 1918.

Arthur Gottlieb Czwalina.